# 第3章

# 公理に基づく幾何学の世界

#### 3-1. 三角形の内角の和

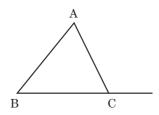
三角形の内角の和が180°になることは誰もが知っていることです. 原論でもそのことを扱っていますが, それを導く過程を追いかけると, 原論の構成がよく見えてきます. 通常なら理屈を積み上げていくのですが, ここでは, 掘り下げていく形をとります. ということで, まずは結論から.

## 第1巻 命題32 ☜ 三角形の内角の和

すべての三角形において1辺が延長されるとき、外角は二つの内対角の和に等しく、三角形の三つの内角の和は2直角に等しい。

三角形ABCにおいて

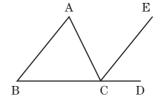
$$(\angle C$$
の外角 $) = \angle A + \angle B,$  
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$$



が成り立つことを主張しています.

証明は以下のようなものです(表現は現代調にしています).

- ①BCの延長上にDをとる.
- ②C を通り AB に平行な直線 CE を引く.
- ③同位角は等しいので



$$\angle ABC = \angle ECD$$
 である.

④錯角は等しいので

$$\angle BAC = \angle ACE$$
 である.

⑤ゆえに,

$$(\angle C$$
の外角 $) = \angle A + \angle B$  である.

⑥これの両辺に $\angle C$ を加えると、

$$(\angle C$$
の外角 $) + \angle C = \angle A + \angle B + \angle C$  である.

⑦直線BCに直線CAが立てられているので、

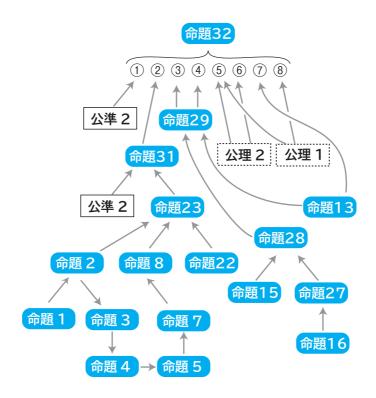
$$(\angle C$$
の外角 $) + \angle C = 180^{\circ}$  である.

⑧以上から

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$$
 である.

これが証明すべきことであった.

"当たり前"のことを積み上げたとても簡単な証明です.しかし、 原論の立場では、すべてに根拠がなければなりません.大まかに 見て.次のような論理の流れになっています:



では、この論理のネットワークを順に見ていきましょう.

①は、「直線を延長する作業が可能であるか?」を考えねばなりません。それは**公準2**で保証されています:

#### 第1巻 公準(要請)

2. 有限直線を連続して一直線に延長すること.

次に、②です.「ある点を通って、ある直線に平行な直線を引くことができるか?」ということを考える必要があります. もちろん. それも直前の命題でつぶされています:

### 第1巻 命題31 ☜平行線の作図

与えられた点を通り、与えられた直線に平行線をひくこと.

この命題を示すには、公準2に加え、

# 第1巻 命題23 ☜角の作図

与えられた直線上にその点において与えられた直線角に等しい直線角をつくること.

が必要です.これは、「決まった角度を作図できること」を保証するものです.この**命題23**を示すには、**3**つの命題: