R_3 と書きました。また、正方形を自分自身に重ねる線対称操作は、図4-2のような S_1, S_2, S_3, S_4 の4種類がありました。

Gの元同士の演算 $8 \times 8 = 64$ 通りの結果をすべて列挙したのが右下の表です。

この群Gの乗積表を眺めながら、Gのすべての部分群をみつけ出す試みをしましょう。

すぐにみつかるのは、当たり前の部分群であるG自身と、単位元だけから成る部分群 $\{e\}$ です。

それから、回転対称操作だけから成る集合

$$\{e,\ R_1,\ R_2\ ,R_3\} \quad \cdots①$$

も部分群になることがわかるでしょう。回転対称操作をつなぎ合わせたものも回転対称操作に他ならないと容易に理解できま

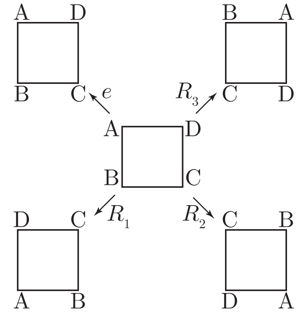

図4-1

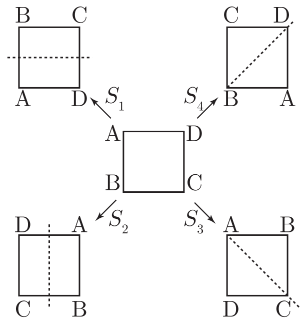

図4-2

○	e	R_1	R_2	R_3	S_1	S_2	S_3	S_4
e	e	R_1	R_2	R_3	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	R_1	R_2	R_3	e	S_3	S_4	S_2	S_1
R_2	R_2	R_3	e	R_1	S_2	S_1	S_4	S_3
R_3	R_3	e	R_1	R_2	S_4	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_4	S_2	S_3	e	R_2	R_3	R_1
S_2	S_2	S_3	S_1	S_4	R_2	e	R_1	R_3
S_3	S_3	S_1	S_4	S_2	R_1	R_3	e	R_2
S_4	S_4	S_2	S_3	S_1	R_3	R_1	R_2	e

す。この部分群の乗積表は、91ページの表の左上部分（e と R 記号だけでできているグレーの部分）にあたります。これは、意外なことですが、第3章の例4と同型の群になります。$e \to 0$、$R_1 \to 1$、$R_2 \to 2$、$R_3 \to 3$ と対応させれば、そっくりの乗積表ができあがります。

他にもみつかるでしょうか。

まず、部分群の定義から、部分群は単位元 e を含んでいなければなりません。そこで、これに何か一つだけ元を付け加えただけの2個の元から成る部分群ができないかどうか考えてみます。

すぐに気がつくのが、

$$\{e,\ S_1\} \quad \cdots②$$

○	e	S_1
e	e	S_1
S_1	S_1	e

という部分群です。これはみごとに部分群となります。それはGの乗積表から $\{e,\ S_1\}$ の部分だけを抜き出してみればはっきりします。

この表の、$S_1 \bigcirc S_1 = e$ は「同じ線対称操作をつなぐと何もしないのと同じ」ということを意味します。裏返しの裏返しは元に戻るから当然ですね。つまり、S_1 の逆元は S_1 自身であり、それはこの部分群②にちゃんと含まれています。

これがわかると、これと「同型」の部分群、つまり乗積表がそっくりな群がすぐさまみつかります。それは次の3個です。