2.6 固有値の個数と行列のタイプ

行列には，次の３つのタイプがあります．

(1) 異なる固有値をもつ場合，対応する互いに直交する固有ベクトルがあります．

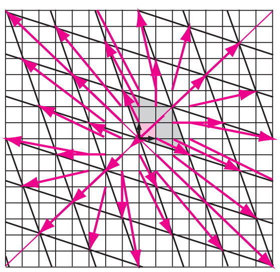
(2) 固有値に重根がある場合，これに属する固有ベクトルは１つです．固有ベクトルに，一般化固有ベクトルを加えてジョルダンの標準型にできます．

(3) 虚根しかない場合，複素数の固有ベクトルになります．向きを変えないような固有ベクトルはありません．

簡単な，２次の行列で解説します．

２次の行列 A の作用により，格子点が変形する様子：$(x, y) \rightarrow (x', y')$ を表したのが (1) ～ (3) の図です．

(1) 行列 A の作用により方向を変えないベクトルの方向は，２つあります．



行列 A：$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

固有方程式：$(\lambda-2)(\lambda-4)=0$

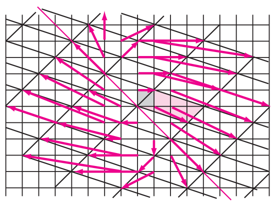
固有値：２個　$\lambda=2, 4$（各単根）

固有ベクトル：２個 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A の作用により方向を変えないベクトルの方向は，1 つあります．



行列 A : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

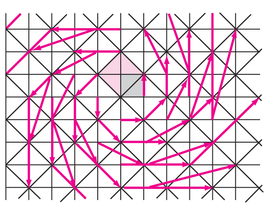
固有方程式 : $(\lambda - 2)^2 = 0$

固有値 : 1 個　$\lambda = 2$ (重根)

固有ベクトル : 1 個 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) 複素数の固有ベクトルが 2 つあります．行列 A の作用は渦状の 45° 回転になり，方向を変えないベクトルはありません．



行列 A : $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

固有方程式 : $(\lambda - 1)^2 + 1 \geqq 0$

固有値 : 2 個　$\lambda = 1 \pm i$ (虚根)

固有ベクトル : 2 個 (複素数) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$$\lambda = 1 + i \longrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 - i \longrightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) の場合は，固有空間は２次元ですが，固有ベクトルは１つなので，一般化固有ベクトルを求めて A をジョルダンの標準型に変形します．

固有ベクトル $\boldsymbol{p}_0$ は，

$$(A-2I)\,\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_0 = 0 \longrightarrow \boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

一般化固有ベクトル p_1 は，

$$(A-2I)\,\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_0 \longrightarrow \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

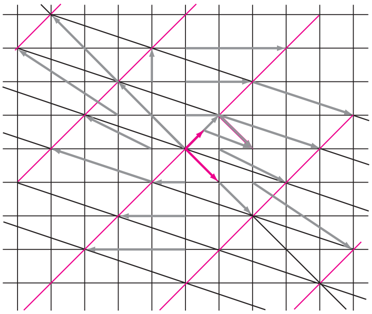
行列 $(\boldsymbol{p}_0\ \boldsymbol{p}_1)$ を用いて，ジョルダンの標準型 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ が得られます．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_0 & \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_0 & \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{p}_0$ は，行列 A の作用で，向きを変えませんが，$\boldsymbol{p}_1$ は一般化固有ベクトルですから，行列 A が作用すると，次のように向きを変えます．

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_0 & \boldsymbol{p}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_0 & \boldsymbol{p}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{p}_0 = 2\boldsymbol{p}_0,\ A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_0 + 2\boldsymbol{p}_1$$



◆図2-6-1