

02

中国の剰余定理と合同式

本章では、余りの条件を扱う中で「中国の剰余定理」という公式と、「合同式」という“整数論”での表記法を紹介します。いずれも本書の核心に近づくために必須のものです。抽象度が増しますが、しっかり理解してください。その中で「数学的帰納法」という証明法を紹介します。

問題 3

2008 灘中第 1 日 [3]

17 で割ると 3 余り、13 で割ると 7 余る 3 桁の整数で最も大きいものは である。

→ 困ったら解答中の **ヒント** を見てください！

解答

ヒント 等差数列を利用します。そして 17, 13 で割った余りの情報を、ある数で割った余りの情報にまとめます。

17 で割って 3 余る数は、公差が 17 の等差数列になります。

3, 20, 37, 54, 71, 88, 105,
122, 139, 156, 173, 190, 207,
224, 241, 258, 275, 292, 309, 326, ………

ヒントに書いたある数とは $17 \cdot 13 = 221$ のことです。

221で割った余りは、順に

3, 20, 37, 54, 71, 88, 105,
122, 139, 156, 173, 190, 207,
3, 20, 37, 54, 71, 88, 105, ………

となります。

3行目が1行目と同じですが、これはたまたまでしょうか？

もちろん必然です。なぜなら公差の17を13個分加えたら $17 \cdot 13 = 221$ になるからです。つまり、13個を1つの周期として

3, 20, 37, 54, 71, 88, 105,
122, 139, 156, 173, 190, 207

が繰り返される、と分かります(今後は「周期13」といいます)。

同様に、13で割って7余る数は公差13の等差数列で、これらを $17 \cdot 13 = 221$ で割った余りは、周期17になります。

7, 20, 33, 46, 59, 72, 85, 98, 111, 124,
137, 150, 163, 176, 189, 202, 215

13個の数と17個の数には共通のものが1つだけあります。

●共通している20にはどんな意味がある？

『17で割ると3余り，13で割ると7余る整数』は，どちらのグループにも属する数なので，

『221で割ると20余る整数』

と言い換えることができるのです．そのような数を並べると，

20, 241, 462, 683, 904, 1125, ………

という初項20，公差221の等差数列です．ですから，3桁で最大のものは

904 〈こたえ〉

です．

➔最後の部分は，並べなくても分かります．

n 番目が

$$20 + 221(n - 1) = 221n - 201$$

なので，1000未満で最大のものを求めると，

$$221n - 201 < 1000 \quad \text{つまり} \quad 221n < 1201$$

を満たす n は $n \leq 5$ です．よって， $n = 5$ のときの

$$221 \cdot 5 - 201 = 904$$

がこたえです．

解答ここまで

さきほどの解答の主要部は「17で割ると3余り、13で割ると7余る」を

「221で割ると20余る」

と言い換えるところでした。大事なのは、

『221で割った余りが1種類に決まったこと』

です。これは、一般的に成り立つ公式として知られています。

ちょっと変わった名前の公式ですが、本書の核心に近づくためには、避けては通れない重要公式です。

公式② 中国の剰余定理

m, n は互いに素な自然数とする。

整数 x は、 m で割ると a 余り、 n で割ると b 余りとする。

すると、 x を mn で割った余りは1つに決まる。

『 m で割った余りと n で割った余りが分かれば、 mn で割った余りは1つに決まる』という公式です。

先ほどの問題では、

「20は17で割って3余り、13で割って7余る」

ことに気付いたら、この公式②を使えば、考えるべきものは

「221で割ると20余る数」

だと分かるのです。便利ですね！

公式②の証明は後ほど(少し知識の確認が必要なので)。

予備知識

不要な部分は
読み飛ばしてください

互いに素の確認

m と n が「互いに素」とは、『最大公約数が1』という意味です。このとき、最小公倍数は mn になります。

例えば、4と7は互いに素、1と3は互いに素ですが、4と6は互いに素ではありません。

4と7を例にして考えます。これらの最小公倍数は28です。

また、整数 x, y が $4x = 7y$ を満たすとき、左辺が4の倍数で、右辺が7の倍数なので、全体として28の倍数です。ゆえに、

$$4x = 7y = 28z \quad (z: \text{整数})$$

$$\therefore x = 7z, y = 4z$$

となります。つまり、 x は7の倍数、 y は4の倍数で、しかも、4と7が互いに素なので、 z は x, y の最大公約数です。

次は、最大公約数の情報を活かすために重要な事実です。証明は省略しますが、説明の過程で納得できるはずです！