1-4 自然座標系

自然座標系を考えましょう。自然座標系では、軌道に沿って測った長さをsとします。長さsは速度の大きさvを使って、次のように与えられます。

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$と書くこともできる

$$s=\int_0^t v\,\mathrm{d}t \tag{1.4.1}$$

時刻$t=0$におけるsをゼロとする

図1-4-1に示したように、微小軌道を円で近似したときの半径（曲率半径）ρを使って、基底となる3つの単位ベクトルを次のように定義します。これらはsの関数ということもできますし、tの関数ということもできます。

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$の方向（動く方向）

接線ベクトル
$$\boldsymbol{e}_t=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{1.4.2}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$の大きさと$\mathrm{d}s$は等しい
（$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$は単位長さのベクトル）

円運動では円の半径と一致

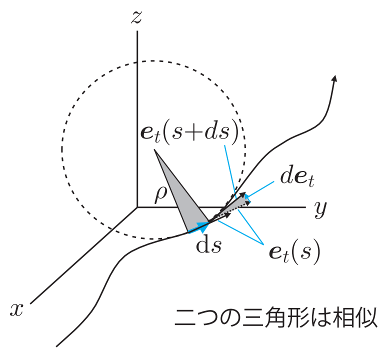
主法線ベクトル　$\boldsymbol{e}_n = \rho \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s} \cdots \rho = \dfrac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s}\right|}$　(1.4.3)

$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t$の方向は$\boldsymbol{e}_t$と直交する。
$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s}$は、$\boldsymbol{e}_t$と直交し、大きさは1

図より$|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t|$と$|\boldsymbol{e}_t|$の比は$|\mathrm{d}s|$と$|\rho|$の比と等しい

外積（$\boldsymbol{e}_t$と$\boldsymbol{e}_n$両方に直交）

陪法線ベクトル　$\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n$　(1.4.4)



◆図1-4-1　自然座標系

任意のベクトル$\boldsymbol{A}$は、単位ベクトル$\boldsymbol{e}_t$と$\boldsymbol{e}_n$と$\boldsymbol{e}_b$を使って、$\boldsymbol{A} = A_t\boldsymbol{e}_t + A_n\boldsymbol{e}_n + A_b\boldsymbol{e}_b$と表されます。このとき、$A_t$、$A_n$、$A_b$を、それぞれ、**接線成分**、**主法線成分**、**陪法線成分**といいます。

自然座標系の成分で表したとき、速度と加速度は要点に示したようになります。

要 点

速度　合成関数の微分

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = v\,\boldsymbol{e}_t \tag{1.4.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

加速度　$v\boldsymbol{e}_t$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1.4.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

速度は軌道方向です。加速度は軌道方向が$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$、法線方向が$\dfrac{v^2}{\rho}$です。

例 題 1-7

図1-4-2のようなx-y面内の等速円運動を考え[*2]、デカルト座標系と自然座標系で加速度の法線方向成分を計算し一致することを確かめましょう。

$$x = R\cos(\omega t) \tag{1.4.7}$$

$$y = R\sin(\omega t) \tag{1.4.8}$$

＊2 $\frac{2\pi}{\omega}$で1周する原点を中心とする円運動です。速度の大きさは$\frac{2\pi R}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} = R\omega$です。