第 1 章

オイラーが愛した特別な数たち

本章では，オイラーが考案したと言われる数e，πについて考えていきます．次章で扱うiと組み合わせた公式：

公 式

$$e^{i\pi}=-1$$

は有名ですね．これについては，後ほど扱います．

きっちり意味を説明し，少し脱線しながら数としての性質もいくつか紹介していきます．

1-1 自然対数の底e

自然対数の底，オイラー数，ネイピア数など，様々な名称で呼ばれるeですが，どのようなイメージをもっているでしょうか．

「値は$e \fallingdotseq 2.718$で，無理数（分数で表せない数）」

とか，

「微分しても変化しない関数e^xの底」

というイメージでしょうか．もしかしたら，

「$e^{i\pi}=-1$に登場する不思議な数」

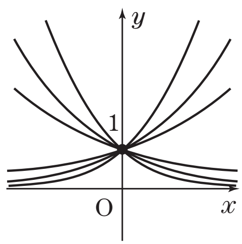
というイメージかも知れません.

ここでは，eを数学的に説明していきます.

☞ **指数・対数関数，微分についての確認はAppendixへ！**

◉いったい，このeはどこから出てきたのでしょうか？

指数関数$y=a^x$ $(a>0)$のグラフは次のようなものでした．そんな中で，特別な指数関数$y=e^x$を定義します.



aの値によってグラフの形状は変化しますが，(0，1)を通ることは不変です.

aの値によってグラフが変化するので，点(0，1)における$y=a^x$の接線の傾きは，aによってどんどん変化します(接線の傾きは，“**微分**”を利用して計算します).

少し変わった定義ですが，指数関数のグラフの形状をもとにeを定義していきます(微分できることは認めておきます！).

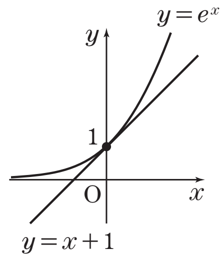
$y=a^x$上の点(0，1)における接線の傾きは，

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad (f(x)=a^x)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \quad (\because\ f(0)=a^0=1)$$

という式で表されますが，上述の通り，aの値によって，様々な値をとります.

ゆえに，その傾きが1になるようなaが存在します．そのようなaのことをeと呼ぶのです．つまり，eとは



定義と計算公式

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

をみたす数です．

このままではわかりにくいので，これを変形していきます．

$$t=e^h-1 \quad つまり \quad h=\log(1+t)$$

とおくと，$h\to0$のとき$t\to0$なので，①は

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

$$\lim_{t\to0}\frac{t}{\log(1+t)}=1 \quad つまり \quad \lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

と書き直すことができます．

さらに，対数の性質により，②は

$$\lim_{t\to0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}=\log e \quad \therefore \quad \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$