素数の研究をしてきた人は、今から2500年くらい昔のギリシャ時代から、たくさんいました。その探求が現代のように深い研究になってきたのは、18世紀のオイラーさん（1707年－1783年）と19世紀のリーマンさん（1826年－1866年）のおかげです。それは、ゼータ（ζ）を使うという段階に至ったからです。

オイラーさんは素数2, 3, 5, 7、…にわたる積（オイラー積）を考え、それが自然数1, 2, 3、…にわたる和に等しいことを見抜きました（1737年）。リーマンさんは、この関数を$\zeta(s)$と名付け、さらに、$\zeta(s)$が0になる複素数（零点と呼びます）は実質的に実部が1/2という一直線上に乗っていると予想しました（すべての複素数sに対して$\zeta(s)$を意味づけることは複素関数論の解析接続という方法が必要になります）。これが、数学最大の難問と言われる『リーマン予想』です。このリーマン予想は1859年に提出されてから150年以上経ちましたが、未解決です。本書では、このリーマン予想とその一歩先を話したいと思います。

リーマンゼータ関数のはじめのほうの虚の零点は次のようになっています。

リーマンゼータ関数の虚の零点の例

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}$$

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 14.134725141734\cdots$$

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 21.022039638771\cdots$$

$$\frac{1}{2} \pm i \cdot 25.010857580145\cdots$$

・・・

このように、すべての虚の零点の実部が$\frac{1}{2}$である、というのがリーマン予想です。

リーマン予想の感じをイメージしていただくために、素数やゼータとは離れた数学のところからの美しい定理を紹介しておきます。それは、オイラーさんが1763年12月12日にペテルブルグ（現在のサンクトペテルブルグ）学士院に報告した

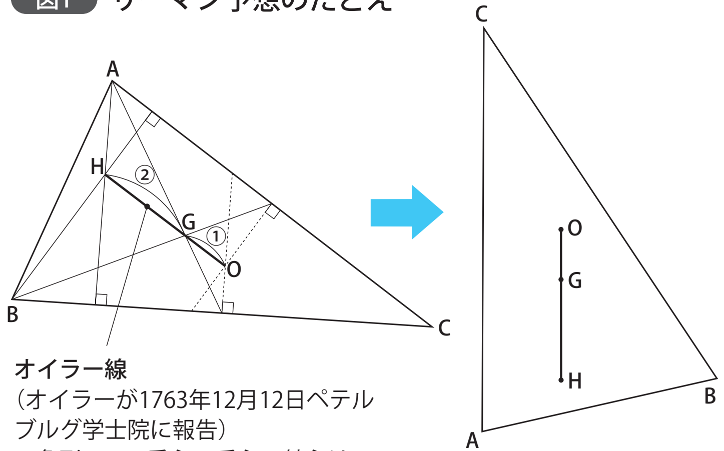
『オイラー線定理：三角形の外心・重心・垂心は一直線（オイラー線）上に乗っていて、間隔の比はこの順に1：2となる』

という不思議な定理です。リーマン予想の際の零点に外心・重心・垂心を対比して考え、一直線上に乗っているという同

じ性質と眺めてもらえばよいのです。どんな三角形でも外心・重心・垂心は、なぜか、オイラー線という一直線上に乗っていて、ずれていないのです。しかも、間隔の比が1：1という等間隔ではなくて、なぜか1：2なのです。

リーマン予想は、この「一直線上に乗っている」という性質にあたります。では、オイラー線の場合に「間隔が1：2」という精密な性質は、リーマン予想の場合には何にあたるのでしょうか？　それは、一直線上に零点が乗っているというリーマン予想をさらに踏み込んで、零点の虚部の間隔がどう

図1　リーマン予想のたとえ



オイラー線
（オイラーが1763年12月12日ペテルブルグ学士院に報告）
三角形ABCの重心、垂心、外心は1直線上にある。

G：各頂点から対辺の中心に引いた3本の線分の交点。
H：各頂点から対辺に引いた垂線の交点。
O：各辺の垂直二等分線の交点。

なっているか、と考えるということです。零点の虚部の間隔がどうなっているかきちんと知りたい、という素朴な知的欲求は自然なものです。

本書では、こういう、リーマン予想を一歩進めた『深リーマン予想』にも足を踏み入れます。

また、整数と多項式を対比するという絶対数学の考え方を基調として紹介します。絶対数学とは1元体$\mathbb{F}_1$上で、すべての数学を展開するものです。リーマン予想解明に向けての最強の考え方です。最近の*abc*予想の研究でも使われています。このような、新しい世界を楽しんでください。