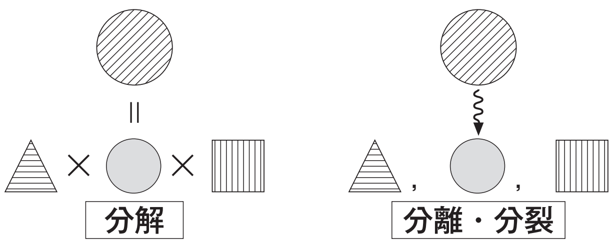
リーマン予想は、数学最大の難問と呼ばれる超有名な未解決問題です。それは「ゼータの零点」という難しそうなものについての予想であることは知られていても、その本当の内容が「因数分解」であることは、まったく伝わっていません。ここでは、因数分解の話から思い出していきます。それが、零点の正体なのです。

1.1　分解すること

ものごとを基本的なものに分解して調べることの代表が**因数分解**です。数学で「分解」と言うときに気を付けないといけないことは、バラバラにするだけではダメなことです。それら分解されてでてくるもの全体によって、もとのものを表現できていることが必要です。単に分解と呼ぶより**分解統合**と言ったほうが誤解がないかもしれません。数学の分解では、因数分解（多項式や関数の因数分解など）でも、素因数分解（自然数を素数に分解：$12 = 2 \times 2 \times 3$ など）でも、そうなっています。ゼータの話で重要なオイラー積分解（第２章はじめ）もそうです。

図で描いてみましょう。



左側が、ここで分解と呼ぶもので、もとのものを分解したもので表現（再現）しています。一方、右側は、もとのものを分解してバラバラにしただけですので、分離・分裂というのが適切でしょう。2011 年 3 月 11 日以来、日本で深刻になっている原子炉で原子を分解したときのように、分離・分裂は、長期間にわたるとりかえしのつかない重大な問題を引き起こします。

言葉を換えると、分解後について全責任を持つということが、ここで分解と呼んでいるものです。

数学の分解の起源は、紀元前 500 年頃に「素因数分解」がピタゴラス学派によって発見されたときです。ちなみに、少し遅れて「原子論」（ものを原子に分解すること）もデモクリトスによって発見されました。「原子（アトム）」とは「分解できないもの」というギリシャ語ア・トムです。素因数分解はゼータの中心に位置していますが、発見から 2500 年後の現代社会でも情報セキュリティの基礎として使われています。

さて、通常の因数分解は中学校で学習しますが、

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2),$$
$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3),$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^2+1=(x-i)(x+i)$$

などです。ここでは、実数だけでなく複素数も使いました。i は $i^2=-1$ となる虚数単位です。どのように因数分解できる

か見つける（“目の子”や“目の子算”と言います）のはクイズのようで楽しいものです。

複素数まで使うと

$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解でき、2 次方程式の根の公式によって、

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\[2ex] \beta = \dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

となることも知っているでしょう。

もっと一般に、**ガウスの定理**（**代数学の基本定理**、1800 年頃）によって、n 次多項式も

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

と複素数$\alpha_1,\cdots,\ \alpha_n$ によって因数分解できることが証明されています。ここで、$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ も複素数で大丈夫です。

ただし、具体的に与えられた a_0 ～ a_{n-1} に対して α_1 ～α_n を求めることは簡単ではありません。それは n 次方程式

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

の根（解）α_1 ～α_n を求める問題と言っても良いですし、多項