4 ラグランジュの未定乗数法

前の節では、$z=f(x, y)$の極値の求め方を紹介しました。ここでは、x, y に束縛条件がついている場合、つまり x, y が $g(x, y)=0$ を満たしながら動く場合の $z=f(x, y)$の極値の求め方（**ラグランジュの未定乗数法**）を紹介します。

この手法は物理学、化学、工学、経済学、…いたるところで使われています。極値といっていますが、応用の場面ではそれが、最大値、最小値になることが多いです。ラグランジュの未定乗数法は最大値・最小値を求めるとき強力な手法です。ぜひともその本質をみなさんに理解してもらいたいと思います。

ラグランジュの未定乗数法

x, y が $g(x, y)=0$ を満たしながら動くとき、$f(x, y)$が(a, b)で極値を取るならば、ある実数 λ があって、

$$\begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix},\quad g(a, b)=0$$

が成り立つ。

ラグランジュの未定乗数法の説明をする前に、高校で学習したおなじみの最大・最小問題を復習してみましょう。

ホップ **問題　ラグランジュの未定乗数法**　（別 p.98）

x、y が $x^2+y^2=1$ を満たしながら動くとき、$3x+4y$ の最大値と最小値を求めよ。

座標平面上で、

$3x+4y=k$　（k は定数）……①、$x^2+y^2=1$……②

のグラフを考えるのが定石の１つでした。

例えば $k=2$ のとき、図１のように①と②のグラフの共有点があるので、その

座標を$(\alpha,\ \beta)$とすれば$\left(\text{実際に解いてみると、}\alpha=\dfrac{6\mp4\sqrt{21}}{25}\text{、}\beta=\dfrac{8\pm3\sqrt{21}}{25}\right)$、$\alpha$, βは$\alpha^2+\beta^2=1$を満たし、$3\alpha+4\beta=2$となりますから、$3x+4y$は$x^2+y^2=1$という条件のもとで2の値を取ることが可能です。

$k=6$のときは、①と②のグラフの共有点がないので、$x^2+y^2=1$という条件のもとで、$3x+4y=6$は実現できません。

kが取りうる範囲は、①と②のグラフが共有点を持つようなkの範囲を求めればよいのでした。

図 1

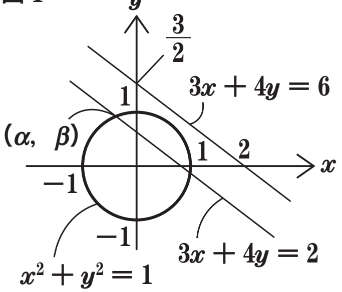
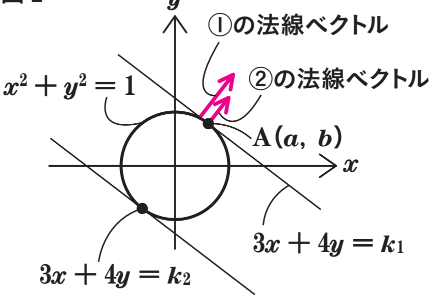


図 2



kを大きくすればするほど、①の直線のグラフは上方に、kを小さくすればするほど、①の直線のグラフは下方にありますから、$x^2+y^2=1$の条件のもとで、kが最大値・最小値を取るのは図2のように①の直線が②の円に接したときです。このときの$(x,\ y)$の値やkを求めれば問題は解決します。①が上方で接するときの式を$3x+4y=k_1$とすると、k_1が最大値で、下方で接するときの式を$3x+4y=k_2$とすると、k_2が最小値となります。

高校数学では、①と②のグラフが接するときのkの値を求めるのに、①と②を連立させて重解条件に結びつけたり、①の直線と原点の距離が1である、と処理したりしました。

ここでは、法線ベクトルを使ってみましょう。

①と②のグラフが接するときの接点を$\mathrm{A}(a,\ b)$とします。

すると、

①と②のグラフが接する

$\Longleftrightarrow$ Aでの①の法線ベクトルと②の法線ベクトルが平行

と言いかえられます。

①②を陰関数表示するために、

$$f(x,\ y)=3x+4y,\ h(x,\ y)=f(x,\ y)-k,\ g(x,\ y)=x^2+y^2-1$$

とおきます。①と②は、陰関数表示で、

$$h(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0$$

と表され、$(a,\ b)$での法線ベクトルは、それぞれ$\begin{pmatrix} h_x(a,\ b) \\ h_y(a,\ b) \end{pmatrix}\left(=\begin{pmatrix} f_x(a,\ b) \\ f_y(a,\ b) \end{pmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} g_x(a,\ b) \\ g_y(a,\ b) \end{pmatrix}$です。これらが平行である条件は、ある実数$\lambda$があって、

$$\begin{pmatrix} f_x(a,\ b) \\ f_y(a,\ b) \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} g_x(a,\ b) \\ g_y(a,\ b) \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots③$$

となることです。$(a,\ b)$を求めるには、これと、

$$g(a,\ b)=0\cdots\cdots④$$

を連立させればよいのです。③、④を具体的に書くと、

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}\cdots\cdots⑤,\ a^2+b^2-1=0\cdots\cdots⑥$$

より、$a=\dfrac{3}{2\lambda},\ b=\dfrac{4}{2\lambda}$。これを⑥に代入して、

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2-1=0 \qquad \therefore\quad 25-4\lambda^2=0 \qquad \therefore\quad \lambda=\pm\frac{5}{2}$$

よって、①と②のグラフが接するときの接点は、

$$(a,\ b)=\left(\frac{3}{2\lambda},\ \frac{4}{2\lambda}\right)=\left(\pm\frac{3}{5},\ \pm\frac{4}{5}\right) \quad \text{（複号同順）}$$

です。これから、最大値は$3\cdot\dfrac{3}{5}+4\cdot\dfrac{4}{5}=5$、最小値は$3\left(-\dfrac{3}{5}\right)+4\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-5$。

実は、これがラグランジュの未定乗数法の骨子です。λを未定乗数といいます。なんてことはないですね。2つのグラフが接する条件を「**接点で法線ベクトルが平行**」と言い換えただけのことです。