ステップ

演習 ▶ロピタルの定理 （講義編 p.161 参照）

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

[$x\to 0$ のとき、$\dfrac{1}{x(x+1)}\to\pm\infty$、$\dfrac{\log(1+x)}{x^2}\to\pm\infty$ なので、このままでは極限が求まらない。通分して、ロピタルの定理が使える形にする。]

(1) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\log(1+x)}{x^2(x+1)}$$

ビブン

ビブン

[$x\to 0$ のとき、$x-(x+1)\log(1+x)\to 0$、$x^2(x+1)\to 0$ なのでロピタルの定理が使える。]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\log(1+x)-(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\log(1+x)}{3x^2+2x}$$

ビブン

ビブン

[$x\to 0$ のとき，$-\log(1+x)\to 0$、$3x^2+2x\to 0$ なので、ロピタルの定理を用いる。]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{x+1}}{6x+2}=-\frac{1}{2}$$

(2) $x\to 1$ のとき、$x\to 1$、$\dfrac{1}{1-x}\to\pm\infty$ なのでこのままでは極限が求まらない。

$y=x^{\frac{1}{1-x}}$ とおいて、$\log y$ の極限を取る。

ビブン

$$\lim_{x\to 1}\log y=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)}{-1}=-1$$

ビブン

[$x\to 1$ のとき、$1-x\to 0$、$\log x\to 0$ なので、ロピタルの定理を用いる。]

$$\lim_{x\to 1} y=\lim_{x\to 1} e^{\log y}=e^{-1}$$

$t=x-1$ とおいて

$(与式)=\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{e}$

でもよい

ジャンプ 確認 ▶ロピタルの定理

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ (a、b、c は正)

[$x\to0$ のとき、$\dfrac{1}{x^2}\to\infty$、$\dfrac{1}{\tan^2 x}\to\infty$ なので、このままでは極限は求まらない。通分する。]

(1) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\tan x+x)}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2$$

[$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x+x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}+1\right)=2$、$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2=1$ なので、残りの $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ を考える。$\tan x-x\to0$、$x^3\to0$ なのでロピタルの定理を使う。]

$$\lim_{x\to0}\frac{\overset{\text{ビブン}}{\boxed{\tan x-x}}}{\underset{\text{ビブン}}{\boxed{x^3}}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{3\cos^2 x}=\frac{1}{3}$$ よって、$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot1=\frac{2}{3}$

(2) [$x\to0$ のとき、$\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\to1$、$\dfrac{1}{x}\to\pm\infty$ なのでこのままでは極限は求まらない。]

$y=\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおく。 $(\log f)'=\dfrac{f'}{f}$, $(a^x)'=(\log a)a^x$

$$\lim_{x\to0}\log y=\lim_{x\to0}\frac{\log\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\overset{\text{ビブン}}{\boxed{\log(a^x+b^x+c^x)-\log3}}}{\underset{\text{ビブン}}{\boxed{x}}}$$

[$x\to0$ のとき、$x\to0$、$\log(a^x+b^x+c^x)-\log3\to0$ なのでロピタルの定理を用いる。]

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{(\log a)a^x+(\log b)b^x+(\log c)c^x}{a^x+b^x+c^x}\right)}{1}=\frac{\log a+\log b+\log c}{3}$$

$$=\log\sqrt[3]{abc}$$

よって、$\displaystyle\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}e^{\log y}=e^{\log\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$

ステップ 演習 ▶マクローリン展開 （講義編 p.176 参照）

次の関数の n 次導関数を計算し、マクローリン展開せよ。また、収束半径 R を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　　　(2) $\cosh x$

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$とおく。$f'(x)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$f^{(2)}(x)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}$、$f^{(3)}(x)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}\right)(1+x)^{-\frac{7}{2}}$、…

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}(1+x)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

よって、$f(0)=1$、$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^n\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}=\dfrac{(-1)^n\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}$

マクローリン展開は、

$$\overset{f(x)}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}}=\overset{f(0)}{\boxed{1}}-\overset{f'(0)}{\boxed{\frac{1}{2}}}x+\overset{\frac{f^{(2)}(0)}{2!}}{\boxed{\frac{1\cdot3}{2\cdot4}}}x^2-\overset{\frac{f^{(3)}(0)}{3!}}{\boxed{\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}}}x^3+\cdots+\overset{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}{\boxed{\frac{(-1)^n\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}}}x^n+\cdots\cdots$$

$a_n=\dfrac{(-1)^n\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}$とおくと、

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2(n+1)}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right|$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n+1}{2(n+1)}\right|=1$　　　よって、収束半径 R は、$R=\dfrac{1}{r}=1$

(2) $f(x)=\cosh x$ とおく。$f'(x)=\sinh x$、$f^{(2)}(x)=\cosh x$、$f^{(3)}(x)=\sinh x$、…

n が奇数のとき、$f^{(n)}(x)=\sinh x$、$f^{(n)}(0)=0$

n が偶数のとき、$f^{(n)}(x)=\cosh x$、$f^{(n)}(0)=1$

マクローリン展開は、

$$\overset{f(x)}{\boxed{\cosh x}}=\overset{f(0)}{\boxed{1}}+\frac{\overset{f^{(2)}(0)}{\boxed{1}}}{2!}x^2+\frac{\overset{f^{(4)}(0)}{\boxed{1}}}{4!}x^4+\cdots+\frac{\overset{f^{(2n)}(0)}{\boxed{1}}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$であり、$e^x$ のマクローリン展開の収束半径が ∞ なので、

$\cosh x$ の収束半径 R も、$R=\infty$

［$a_{2n}=\dfrac{1}{(2n)!}$とおいて、$r=\varlimsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}}=0$ から、$R=\infty$ としてもよい］

ジャンプ

確認 ▶マクローリン展開

次の関数の n 次導関数を計算し、マクローリン展開せよ。また、収束半径 R を求めよ。

(1)　a^x　　　　(2)　$\log(1+3x+2x^2)$

(1)　$f(x)=a^x$ とおくと、$f'(x)=(\log a)a^x$、$f^{(2)}(x)=(\log a)^2a^x$、…、

$f^{(n)}(x)=(\log a)^n a^x$　　よって、$f(0)=1$、$f^{(n)}(0)=(\log a)^n$

マクローリン展開は、

$$\underbrace{a^x}_{f(x)}=\underbrace{1}_{f(0)}+\underbrace{(\log a)}_{f'(0)}x+\frac{\overbrace{(\log a)^2}^{f^{(2)}(0)}}{2!}x^2+\frac{\overbrace{(\log a)^3}^{f^{(3)}(0)}}{3!}x^3+\cdots+\frac{\overbrace{(\log a)^n}^{f^{(n)}(0)}}{n!}x^n+\cdots$$

$a_n=\dfrac{(\log a)^n}{n!}$ とおくと、

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\log a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(\log a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log a}{n+1}=0$$

$R=\dfrac{1}{r}$ より、収束半径は、$R=\infty$　［公式による解法：$a^x=e^{(\log a)x}$ なので、e^x のマクローリン展開で x を $(\log a)x$ におきかえる］

(2)　$f(x)=\log(1+3x+2x^2)$ とおく。

$\log(1+3x+2x^2)=\log\{(1+x)(1+2x)\}=\log(1+x)+\log(1+2x)$ を用いて、

$$f^{(n)}(x)=(\log(1+x)+\log(1+2x))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot 2^n}{(1+2x)^n}$$

［$(g(ax+b))^{(n)}=a^ng^{(n)}(ax+b)$ で、$a=2$、$b=1$、$g(x)=\log x$ とする。$(\log x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$］

$f(0)=0$、$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+2^n)$

マクローリン展開は、

$$\underbrace{\log(1+3x+2x^2)}_{f(x)}=\underbrace{3}_{f'(0)}x\overbrace{-\frac{5}{2!}}^{f^{(2)}(0)}x^2+\frac{\overbrace{18}^{f^{(3)}(0)}}{3!}x^3+\cdots+\underbrace{\frac{\overbrace{(-1)^{n-1}(n-1)!(1+2^n)}^{f^{(n)}(0)}}{n!}}_{\frac{(-1)^{n-1}(1+2^n)}{n}}x^n+\cdots$$

$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}(1+2^n)}{n}$ とおくと、

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+2^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{1+2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n}+2}{\frac{1}{2^n}+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|=2$$

収束半径は、$R=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}$　［$\log(1+x)$ の収束半径は 1、$\log(1+2x)$ の収束半径は $\dfrac{1}{2}$、和の関数はこのうち小さい方の収束半径を持つ］