ステップ

演習 ▶行列の加減・定数倍 （講義編 p.24 参照）

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$とおく。

(1)　$-2A+3B$ を求めよ。

(2)　$-3A-B+X=A-3B$ を満たす X を求めよ。

(3)　$2X-Y=A$, $-5X+3Y=B$ を満たす X、Y を求めよ。

(1)

(2)

(3)

ジャンプ 確認 ▶行列の加減・定数倍

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$とおく。

(1) $2A-3B$ を求めよ。

(2) $X+2A-B=-A+B$ を満たす X を求めよ。

(3) $3X+7Y=A$, $2X+5Y=B$ を満たす X, Y を求めよ。

(1)

(2)

(3)

ステップ

演習 ▶行列の積 （講義編 p.27 参照）

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$のとき、

AB、BC、$(AB)C$、$A(BC)$を計算せよ。

ジャンプ

確認 ▶行列の積

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}$のとき、

AB、BC、$(AB)C$、$A(BC)$を計算せよ。

ステップ

演習 ▶行列の n 乗 (1) (講義編 p.34 参照)

次の行列の n 乗を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ジャンプ

確 認 ▶行列の n 乗（1）

次の行列の n 乗を求めよ。

（1）　$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　　　（2）　$B=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

（1）

（2）

ステップ

演習 ▶行列の n 乗 (2) (講義編 p.34 参照)

次の行列の n 乗を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\end{pmatrix}$

(1)

(2)

ジャンプ 確認 ▶行列の n 乗 (2)

次の行列の n 乗を求めよ。

(1)　$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　　(2)　$B=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶行列のランク （講義編 p.39 参照）

次の行列のランクを求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -7 & -2 \\ -1 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 14 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 13 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 15 & 9 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ジャンプ

確 認 ▶行列のランク

次の行列のランクを求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -1 & 17 \\ -3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 19 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & -14 \\ 8 & -2 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶逆行列 （講義編 p.43 参照）

次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 　　(2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ -3 & 1 & -11 & 12 \\ 2 & -1 & 6 & -5 \\ 4 & -2 & 14 & -13 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ジャンプ

確 認 ▶逆行列

次の行列の逆行列を求めよ。

(1)　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶行列式（1）（講義編 p.49 参照）

次の行列の行列式を求めよ。

(1)　$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　　(2)　$B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ジャンプ 確認 ▶行列式（1）

次の行列の行列式を求めよ。

（1）　$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$　　（2）　$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

（1）

（2）

ステップ

演習 ▶行列式（2）（講義編 p.49 参照）

次の行列式を因数分解せよ。

（1）$\begin{vmatrix} a & bc & a^2 \\ b & ca & b^2 \\ c & ab & c^2 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

（1）

（2）

ジャンプ 確認 ▶行列式（2）

次の行列式を因数分解せよ。

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ b & b+c+2a & c \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶行列式 (3)

次の行列式を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ [(n, n)型で対角成分は0、それ以外は1]

(1)

(2)

ジャンプ

確認 ▶行列式 (3)

次の行列式を求めよ。

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & & n \\ 1 & 0 & 2 & \cdots\cdots & & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots\cdots & & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}$$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶行列式 (4)

(1) A, B が n 次正方行列のとき、次が成り立つことを示せ。

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A-B|\,|A+B|$$

(2) 次の行列式を因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

(1)

(2)

ジャンプ 確認 ▶行列式 (4)

(1) A, B が n 次正方行列のとき、次が成り立つことを示せ。

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A-iB|\,|A+iB| \qquad \text{（ここで、} i \text{ は虚数単位）}$$

(2) 次の行列式を因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶行列式 (5)

次の等式を証明せよ。ただし、(1)で成分を書いていないところは 0。

(1) $$\begin{vmatrix} a_n & -1 & & & \\ a_{n-1} & x & -1 & & \\ a_{n-2} & & x & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ a_0 & & & & x \end{vmatrix} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_0$$

(2) $$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

(1)

(2)

ジャンプ

確認 ▶行列式（5）

次の等式を証明せよ。ただし、(1)で成分を書いていないところは 0。

(1) $$\begin{vmatrix} x^2+1 & x & & & \\ x & x^2+1 & x & & \\ & x & x^2+1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x^2+1 & x \\ & & & x & x^2+1 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$$

(n, n)型行列

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af-be+cd)^2$$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶連立方程式（1） （講義編 p.84 参照）

次の連立方程式を解け。

$$
\begin{cases}
x+9y-2z+7w=-6 \\
2x+14y-7z+9w=-12 \\
-2x-7y+4z-5w=5 \\
3x+20y-10z+13w=-17
\end{cases}
$$

ジャンプ

確認 ▶連立方程式（1）

次の連立方程式を解け。

$$
\begin{cases}
x+4y-3z+5w=10 \\
-3x+3y-5z+7w=10 \\
4x-3y+7z+5w=6 \\
3x+2y-4z-3w=-13
\end{cases}
$$

ステップ

演習 ▶連立方程式（2）（講義編 p.87 参照）

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x+y+8z+w=1 \\ x+4y+11z+18w=-3 \\ -x+3y+3z+17w=-4 \\ 3x+2y+13z+4w=1 \end{cases}$$

ジャンプ

確認 ▶連立方程式（2）

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+y+z+4w=1 \\ 2x+y+3z+5w=5 \\ 3x-y+7z=15 \\ -2x+3y-7z+7w=-17 \end{cases}$$

ステップ 演習 ▶連立方程式（3）

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} -2x-\ \ y+3z+\ \ 6w=-2 \\ \quad x+3y-2z-\ \ 7w=8 \\ -3x+2y-2z-14w=1 \\ \quad 4x-2y+3z+19w=1 \end{cases}$$

ジャンプ

確 認 ▶連立方程式（3）

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x+\ y+4z+\ 9w=15 \\ \ x-2y+3z-\ w=13 \\ 3x+4y-\ z+\ 7w=-1 \\ -\ x+3y+2z+14w=1 \end{cases}$$

ステップ

演習 ▶基底の取替え （講義編 p.121 参照）

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}5\\-4\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$とする。

$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ を基底 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ に取り替える行列 P を求めよ。

また、$-\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2+8\boldsymbol{a}_3=x\boldsymbol{b}_1+y\boldsymbol{b}_2+z\boldsymbol{b}_3$ を満たす x、y、z を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶基底の取替え

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$とする。

$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ に取り替える行列を P を求めよ。

また、$5\boldsymbol{a}_1-4\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3=x\boldsymbol{b}_1+y\boldsymbol{b}_2+z\boldsymbol{b}_3$ を満たす x, y, z を求めよ。

ステップ 演習 ▶交空間と和空間（1） （講義編 p.137 参照）

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}5\\-4\\9\\2\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\3\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\-4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\7\\3\end{pmatrix},$$

$W_a=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle$, $W_b=\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle$ とおくとき、

W_a+W_b, $W_a\cap W_b$ の次元と基底を求めよ。

ジャンプ

確 認 ▶交空間と和空間（1）

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-9\\7\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-4\\3\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\9\\10\\7\end{pmatrix},$$

$W_a=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle$, $W_b=\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle$とおくとき、

W_a+W_b, $W_a\cap W_b$ の次元と基底を求めよ。

ステップ

演習 ▶交空間と和空間（2）

$$W_a=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}x+2z+3w=0,\\x-2y+7z-9w=0\end{array}\right\},\ W_b=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}x-y+6z-6w=0,\\2x+9z-4w=0\end{array}\right\}$$

$W_a+W_b,\ W_a\cap W_b$ の次元と基底を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶交空間と和空間（2）

$$W_a=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}x-2z-5w=0,\\2x-6y+9z+5w=0\end{array}\right\},\ W_b=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}x-5y+7z+2w=0,\\3x-7y+10z+5w=0\end{array}\right\}$$

W_a+W_b, $W_a\cap W_b$ の次元と基底を求めよ。

ステップ

演習 ▶シュミットの直交化法 （講義編 p.158 参照）

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$から、シュミットの直交化法によって、$\boldsymbol{R}^4$ の正規直交基底を作れ。

ジャンプ

確認 ▶シュミットの直交化法

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}$から、シュミットの直交化法によって、

$\boldsymbol{R}^4$ の正規直交基底を作れ。

ステップ

演習 ▶直交補空間 （講義編 p.163 参照）

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\6\\-5\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-3\\-5\\2\\-13\\5\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\-9\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\\2\\3\end{pmatrix}, W=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\rangle$$

のとき、$\boldsymbol{R}^5$ における W の直交補空間 $W^{\perp}$ の次元と基底を求めよ。

ジャンプ 確認 ▶直交補空間

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\3\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\15\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\-3\\2\\-1\\-12\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\\5\\9\end{pmatrix}, W=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\rangle$$

のとき、$\boldsymbol{R}^5$ における W の直交補空間 $W^{\perp}$ の次元と基底を求めよ。

ステップ

演習 ▶線形変換の決定

$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形変換 f が

$$f: \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, f: \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と移すとき、標準基底における f の表現行列 A を求めよ。

ジャンプ 確認 ▶線形変換の決定

$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形変換 f が、

$$f:\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}9\\-3\\4\end{pmatrix},\ f:\begin{pmatrix}8\\3\\-2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1\\-3\\-3\end{pmatrix},\ f:\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

と移すとき、標準基底における f の表現行列 A を求めよ。

ステップ

演習 ▶表現行列 (講義編 p.172 参照)

$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f が、$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ -x+3y \\ 2x-y \end{pmatrix}$ で与えられている。

それぞれの基底に関する表現行列 A を求めよ。

(1)　$\boldsymbol{R}^2$: $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}^3$: $\boldsymbol{d}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2)　$\boldsymbol{R}^2$: $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}^3$: $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ジャンプ

確認 ▶表現行列

$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f が、$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \\ -x+2y \end{pmatrix}$ で与えられている。

それぞれの基底に関する表現行列 A を求めよ。

(1) $\boldsymbol{R}^2$: $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}^3$: $\boldsymbol{d}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{R}^2$: $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}^3$: $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶基底の取替えと表現行列 （講義編 p.181 参照）

$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線形写像 f は、$\boldsymbol{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{R}^2$ の基底を $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$にしたとき、表現行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}$で表

される。$\boldsymbol{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{a}'_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}'_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}'_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{R}^2$ の基底を

$\boldsymbol{b}'_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b}'_2=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$に替えたときの f の表現行列を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶基底の取替えと表現行列

$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線形写像 f は、$\boldsymbol{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}^2$ の基底を $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$にしたとき、表現行列 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&-2&2\end{pmatrix}$ で表される。$\boldsymbol{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{a}'_1=\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}'_3=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}^2$ の基底を $\boldsymbol{b}'_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b}'_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$に替えたときの f の表現行列を求めよ。

ステップ

演習 ▶核と像 (講義編 p.185 参照)

$\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^4$ への線形変換 f の標準基底での表現行列が

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 9 & 5 & -1 \\ 3 & -8 & -2 & 7 \\ 1 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{Ker}\, f$ と $\mathrm{Im}\, f$ の次元と基底を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶核と像

$\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^4$ への線形交換 f の標準基底での表現行列が

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{Ker} f$ と $\mathrm{Im} f$ の次元と基底を求めよ。

ステップ

演習 ▶単射・全射 (講義編 p.198 参照)

線形写像fの表現行列が、次のそれぞれの場合、fが単射であるか、全射であるかを判定せよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$　　(4) $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ジャンプ

確認 ▶単射・全射

線形写像 f の表現行列が、次のそれぞれの場合、f が単射であるか、全射であるかを判定せよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $D=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

ステップ 演習 ▶行列の対角化 (講義編 p.205, p.209 参照)

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$を正則行列 P で対角化せよ。

ジャンプ

確認 ▶行列の対角化

$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$を正則行列 P で対角化せよ。

ステップ

演習 ▶ジョルダン標準形 (1) （講義編 p.221 参照）

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$を正則行列 P でジョルダン標準形にせよ。

ジャンプ

確認 ▶ジョルダン標準形（1）

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$を正則行列 P でジョルダン標準形にせよ。

ステップ

演習 ▶ジョルダン標準形 (2) (講義編 p.226 参照)

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 2 \\ 5 & 6 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -7 & 17 & -6 \end{pmatrix}$を正則行列 P でジョルダン標準形にせよ。

ジャンプ

確認 ▶ジョルダン標準形 (2)

$A=\begin{pmatrix} 10 & 3 & -6 & 4 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -17 & -7 & 12 & -7 \end{pmatrix}$を正則行列 P でジョルダン標準形にせよ。

ステップ

演習 ▶一般の行列の n 乗

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$のとき、$A^n$ を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶一般の行列の n 乗

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$のとき、$A^n$ を求めよ。

ステップ

演習 ▶対称行列の対角化 (講義編 p.249 参照)

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$を直交行列 P で対角化せよ。

ジャンプ

確 認 ▶対称行列の対角化

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$を直交行列 P で対角化せよ。

ステップ

演習 ▶正規行列の対角化 （講義編 p.255 参照）

$A=\begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ i & 2 & -i \\ 1-i & i & 1 \end{pmatrix}$をユニタリ行列 U で対角化せよ。

ジャンプ

確認 ▶正規行列の対角化

$A=\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2}i & 1 \\ -\sqrt{2}i & 4 & -\sqrt{2}i \\ 1 & \sqrt{2}i & 3 \end{pmatrix}$をユニタリ行列 U で対角化せよ。

ステップ

演習 ▶スミス標準形と単因子 （講義編 p.285 参照）

次の行列 A について、$A-tE$ のスミス標準形を求め、単因子、最小多項式、ジョルダン標準形を答えよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 2 \\ 5 & 6 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -7 & -17 & -6 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ジャンプ

確認 ▶スミス標準形と単因子

次の行列 A について、$A-tE$ のスミス標準形を求め、単因子、最小多項式、ジョルダン標準形を答えよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix} 10 & 3 & -6 & 4 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -17 & -7 & 12 & -7 \end{pmatrix}$

(1)

(2)

ステップ

演習 ▶2次形式の標準形 （講義編 p.296 参照）

2次形式 $x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz$ を直交変換によって、標準形に直せ。

ジャンプ

確 認 ▶2 次形式の標準形

2 次形式 $x^2-3y^2+z^2-2xy-6xz-2yz$ を直交変換によって、標準形に直せ。

ステップ

演習 ▶2 次形式の符号の判別 （講義編 p.301 参照）

次の 2 次形式の符号を判別せよ。

（1）　$3{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+2x_1x_2-4x_1x_3-6x_2x_3$

（2）　$-{x_1}^2-5{x_2}^2-4{x_2}^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$

（3）　$2{x_1}^2+3{x_2}^2+2{x_3}^2+9{x_4}^2$
$$+2x_1x_2-2x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+6x_2x_4-4x_3x_4$$

（1）

（2）

(3)

ジャンプ

確認 ▶2 次形式の符号の判別

次の 2 次形式の符号を判別せよ。

(1) $-2x_1{}^2-5x_2{}^2-3x_3{}^2+2x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3$

(2) $6x_1{}^2+x_2{}^2+2x_3{}^2+4x_1x_2+4x_1x_3$

(3) $-4x_1{}^2-3x_2{}^2-x_3{}^2-6x_4{}^2$
$$-6x_1x_2+2x_1x_3+8x_1x_4+2x_2x_3+4x_2x_4$$

(1)

(2)

(3)

ステップ

演習 ▶2 次曲線 （講義編 p.305 参照）

次の 2 次式が表す曲線を xy 平面上に描け。

$$3x^2+4xy+3y^2-2x-8y+2=0$$

ジャンプ

確認 ▶2 次曲線

次の 2 次式が表す曲線を xy 平面上に描け。

$$5x^2+8xy-y^2-6x+12y-36=0$$

ステップ

演習 ▶2 次形式の応用 （講義編 p.314 参照）

(1)　$2x^2+2y^2-z^2+2xy+4xz-4yz-3=0$ を直交変換で標準形に直し、式が表す図形は何か答えよ。

(2)　実数 x、y、z が $x^2+y^2+z^2=1$ を満たしながら動くとき、$2x^2+2y^2-z^2+2xy+4xz-4yz$ の最小値・最大値を求めよ。

(1)

(2)

ジャンプ

確認 ▶2 次形式の応用

(1)　$2x^2-y^2-z^2+4xy-4xz+8yz+6=0$ を直交変換で標準形に直し、式が表す図形は何か答えよ。

(2)　実数 x, y, z が $x^2+y^2+z^2=1$ を満たしながら動くとき、$2x^2-y^2-z^2+4xy-4xz+8yz$ の最小値・最大値を求めよ。

(1)

(2)