245 ページ証明の **7** 行目 $g(\boldsymbol{q}) = hg(\boldsymbol{q})$ について補足を以下に記します。ご参考ください。

以下、$V(\alpha_i) = \mathrm{Im} f_i^{m_i}$ とおきます。

[カ] $V(\alpha_i)$ は A の不変部分空間。$g(V(\alpha_i)) \subset V(\alpha_i)$

$V(\alpha_i)$ に含まれる任意の元 $\boldsymbol{x}$ は、$\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{y}$ によって、$\boldsymbol{x} = f_i^{m_i}(\boldsymbol{y}) = (A - \alpha_i E)^{m_i}\boldsymbol{y}$ と表されます。

$A\boldsymbol{x} = A(A - \alpha_i E)^{m_i}\boldsymbol{y} = (A - \alpha_i E)^{m_i}(A\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Im} f_i^{m_i} = V(\alpha_i)$ なので、

$V(\alpha_i)$ は A の不変部分空間です。

A で表される線形変換 g を用いると、$g(V(\alpha_i)) \subset V(\alpha_i)$ となります。

[キ] f_i は $V(\alpha_i)$ に全単射で作用し、$f_i(V(\alpha_i)) = V(\alpha_i)$

$V'(\alpha_i) = \mathrm{Im} f_i^{m_i+1}$ とおきます。

まず、$V'(\alpha_i) \subset V(\alpha_i)$ を示します。

$V'(\alpha_i)$ の任意の元 $\boldsymbol{q}$ は、$\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{x}$ を用いて $\boldsymbol{q} = f_i^{m_i+1}(\boldsymbol{x})$ と表せ、

$\boldsymbol{q} = f_i(f_i^{m_i}(\boldsymbol{x})) = f_i^{m_i}(f_i(\boldsymbol{x})) \in \mathrm{Im} f_i^{m_i} = V(\alpha_i)$ と、$V(\alpha_i)$ に含まれるので、

$$V'(\alpha_i) \subset V(\alpha_i) \qquad \cdots\cdots①$$

次に、$V'(\alpha_i)$ と $V(\alpha_i)$ の次元が等しいことを示します。

m_i の定義より、$\mathrm{Ker} f_i^{m_i} = \mathrm{Ker} f_i^{m_i+1}$ であり、

$$\dim(\mathrm{Ker} f_i^{m_i}) = \dim(\mathrm{Ker} f_i^{m_i+1}) \qquad \cdots\cdots②$$

p.186 の次元公式より、

$$\dim(\mathrm{Ker} f_i^{m_i}) + \dim(\mathrm{Im} f_i^{m_i}) = n \qquad \cdots\cdots③$$

$$\dim(\mathrm{Ker} f_i^{m_i+1}) + \dim(\mathrm{Im} f_i^{m_i+1}) = n \qquad \cdots\cdots④$$

②、③、④ より $\dim(\mathrm{Im} f_i^{m_i}) = \dim(\mathrm{Im} f_i^{m_i+1})$、すなわち

$$\dim(V(\alpha_i)) = \dim(V'(\alpha_i)) \qquad \cdots\cdots⑤$$

①、⑤ より、$V'(\alpha_i) = V(\alpha_i)$

$V'(\alpha_i) = f_i(V(\alpha_i))$ であり、$f_i(V(\alpha_i)) = V(\alpha_i)$ となります。

f_i は線形変換なので、$V(\alpha_i)$ へ全単射で作用します。

[ク] $\mathbb{R}^n = W(\alpha_i) \oplus V(\alpha_i)$

$W(\alpha_i) \cap V(\alpha_i) \ni \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とすると、$W(\alpha_i) \ni \boldsymbol{x}$ より $f_i^{m_i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ですが、

f_i は [キ] より $V(\alpha_i)$ に全単射で作用しますから、$f_i^{m_i}$ も全単射で作用し、

$V(\alpha_i) \ni \boldsymbol{x}$ より、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ です。

これより、$W(\alpha_i) \cap V(\alpha_i) = \{\boldsymbol{0}\}$ なので、$W(\alpha_i) + V(\alpha_i)$ は直和となり、

$W(\alpha_i) \oplus V(\alpha_i)$ です。

一方、次元公式 $\dim(\mathrm{Ker} f_i^{m_i}) + \dim(\mathrm{Im} f_i^{m_i}) = n$ より、

$\dim W(\alpha_i) + \dim V(\alpha_i) = n$ ですから、$\mathbb{R}^n = W(\alpha_i) \oplus V(\alpha_i)$

[ケ] $U = V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r)$

$\mathbb{R}^n$ の元を $W(\alpha_1)$、$W(\alpha_2)$、…、$W(\alpha_r)$、U の基底の 1 次結合で表すことを考えると分かります。 $V(\alpha_i)$ に含まれる元は、[ク] の $\mathbb{R}^n = W(\alpha_i) \oplus V(\alpha_i)$ より、$W(\alpha_i)$ の基底の成分は 0 です。

よって、$V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r)$ に含まれる元 $\boldsymbol{x}$ では、各 i について $W(\alpha_i)$ の基底の成分が 0 になりますから、$\boldsymbol{x}$ は U の元になります。$V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r) \subset U$ です。

一方、U に含まれる元 $\boldsymbol{x}$ は、各 i について $W(\alpha_i)$ の基底の成分は 0 ですから、$V(\alpha_i)$ の基底の 1 次結合で表され、$V(\alpha_i)$ に含まれます。

$\boldsymbol{x}$ は各 $V(\alpha_i)$ に含まれることになるので、$V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r)$ に含まれます。よって、$U \subset V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r)$。したがって、$U = V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r)$ です。

[コ] U は、A の不変部分空間。$g(U) \subset U$

[カ] より $g(V(\alpha_i)) \subset V(\alpha_i)$ です。

$U = V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r)$ の元 $\boldsymbol{x}$ をとります。各 i について $\boldsymbol{x} \in U \subset V(\alpha_i)$ より、$g(\boldsymbol{x}) \in g(U) \subset g(V(\alpha_i))$ が成り立ち、

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) &\subset g(V(\alpha_1)) \cap g(V(\alpha_2)) \cap \cdots \cap g(V(\alpha_r)) \\ &\subset V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) \cap \cdots \cap V(\alpha_r) = U \end{aligned}$$

ですから、U は A の不変部分空間です。

これを用いると、$A\boldsymbol{q} = g(\boldsymbol{q})$ が U の元ですから、$g(\boldsymbol{q}) = hg(\boldsymbol{q})$ が成り立ちます。