ホップ 問題　条件付き確率　（別 p.4）

袋 X と袋 Y があり、袋には赤玉と白玉が何個かずつ入っている。一方の袋を選び、袋の中から 1 個の玉を取り出す試行を考える。

2 つの袋のうち、袋 X を選ぶ確率は$\dfrac{2}{3}$、袋 X から取り出した玉が赤である確率は$\dfrac{1}{4}$、袋 Y から取り出した玉が赤である確率は$\dfrac{2}{5}$であるとする。

一方の袋を選び、袋の中から 1 個の玉を取り出したところ、玉の色は赤だった。このとき、選んだ袋が X である確率を求めよ。

袋 X を選ぶ事象を A、取り出した玉が赤玉である事象を B とします。すると、求める確率は $P(A|B)$で表されます。

$P(A\cap B)$は、乗法公式を用いて、

$$P(A\cap B)=P(B\cap A)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

B（赤玉が出る）ことは、$A\cap B$（袋 X から赤玉が出る）と $\overline{A}\cap B$（袋 Y から赤玉が出る）に場合分けすることができます。

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{5+4}{30}=\frac{3}{10}$$

これから求める確率は、

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{6}\bigg/\frac{3}{10}=\frac{5}{9}$$

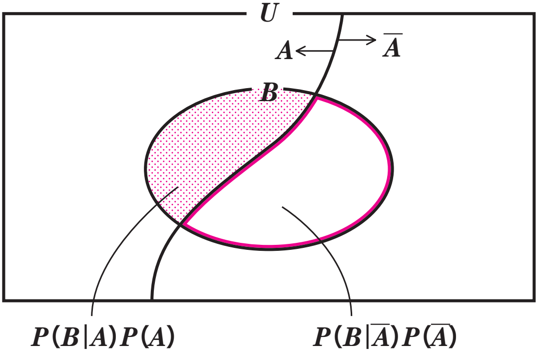
ここで、$P(A\cap B)$、$P(\overline{A}\cap B)$ を条件付き確率によって表した式 $P(A\cap B)=P(B\,|\,A)P(A)$（次図、赤打点部）、$P(\overline{A}\cap B)=P(B\,|\,\overline{A})P(\overline{A})$（赤太線部）を用いて書き直すと、

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

となります。この式はベイズの定理と呼ばれています。

$P(A|B)$は、B のうちの $A\cap B$ の割合、つまり $P(A\cap B)$［赤打点部］を $P(B)$

で割ったものになります。



公式 1.04　ベイズの定理

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

多くの参考書に倣って強調しておきましたが、私はこの式は丸暗記すべき式ではなく、復元できるようにしておく式であると思います。条件付き確率の定義さえ知っておけば、問題を解くことはできるでしょう。ベイズ統計学では基本となる式なので、神棚に飾っているだけです。

上の式では $U=A\cup\overline{A}$ と、U を A と $\overline{A}$ の排反な 2 つの事象に分けて考えています。2 つを 3 つ以上にすることもできます。

U を互いに排反な 3 つの事象に分けた場合、すなわち

$$U=A_1\cup A_2\cup A_3 \qquad A_i\cap A_j=\phi\ (1\leqq i、j\leqq 3、i\neq j)$$

とした場合には、ベイズの定理は下図から次のような式になります。