となります。

定義 2.15　標準正規分布 $N(0,\ 1^2)$

確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

で表される分布を標準正規分布といい、$N(0,\ 1^2)$で表す。

$f(x)$のグラフが y 軸に関して対称なので標準正規分布に従う確率変数 X の期待値は 0 であると予想できます（対称だから 0 であると結論するのは早計です。そうでない場合もあります。コーシー分布 p.182 参照）。

期待値が 0 であることを計算で確かめてみましょう。

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

$\left[\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \text{ より}\right]$

極限を取る前の分散が 1 なので、X の分散も 1 になるはずです。

$N(\ \ ,\ ■)$ には分散を書きますが、1^2 と書いてあるのは標準偏差の 2 乗で書くことが多いからです。

分散が 1 になることを、$f(x)$で確かめておきましょう。

そのためには、公式 1.21 の

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

という定積分を用います。

まずこれを用いて、全範囲での定積分が 1 になることを確認します。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1 \quad \cdots①$$

$\left[t=\frac{x}{\sqrt{2}}\text{と置換すると、}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}dx\right]$

直接、分散を計算すると、

$$V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-0)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\underbrace{\left[x\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\substack{\text{公式 1.13 で } a\Rightarrow e^{\frac{1}{2}}\text{、}x\Rightarrow x^2\\ s\Rightarrow\frac{1}{2}\text{とすると、0 になる}}}-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx}_{\text{①：全事象の確率は 1}}=1$$

となります。

標準化して標準正規分布になる確率分布が**正規分布**（normal distribution）です。

p.72 では離散型確率変数の場合で標準化を説明しましたが、連続型の場合でも同様に定義できます。平均を引いて、標準偏差で割ればよいのです。

正規分布の確率密度関数 $f(x)$ は、標準正規分布の確率密度関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の x を $\frac{x-\mu}{\sigma}$ で置き換え、全範囲での定積分が 1 になるように σ で割った式になります。

定義 2.16　正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$

確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

で表される確率分布を、平均 μ、分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ という。

確率変数 X が $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従うとき、期待値が μ、分散が σ^2 になることを確かめましょう。

$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ と置換積分して、標準正規分布に帰着させます。

$$dz=\frac{1}{\sigma}dx,\quad x=\sigma z+\mu$$