演習 ▶確率 （講義編 p.14、16 参照）

(1)　赤玉 6 個、白玉 4 個を入れた袋から無作為に 4 個の玉を取り出す。このとき、取り出した玉の中に少なくとも 1 個は白玉がある確率を求めよ。

(2)　サイコロを n 回投げるとき、出た目の積が 6 の倍数である確率を求めよ。

(1)　全事象を U とすると、$n(U)={}_{10}\mathrm{C}_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$

事象 A を 4 個のうちに 1 つも白玉がない事象、すなわちすべてが赤玉である事象とすると、少なくとも 1 個白玉がある事象は $\overline{A}$ である。

6 個の赤玉から 4 個を取り出す場合の数は、$n(A)={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

求める確率は、$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{15}{210}=1-\dfrac{1}{14}=\dfrac{13}{14}$

(2)　事象 A、B を

A : n 回中 1 回も 2 の倍数が出ない

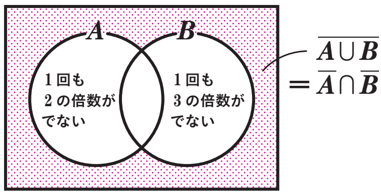
B : n 回中 1 回も 3 の倍数が出ない

とおくと、それぞれの余事象は、

$\overline{A}$: n 回中少なくとも 1 つ 2 の倍数が出る

$\overline{B}$: n 回中少なくとも 1 つ 3 の倍数が出る

なので、



出た目の積が 6 の倍数　$\iff$　n 回中少なくとも 1 つ 2 の倍数があり、

かつ　少なくとも 1 つ 3 の倍数がある

$\iff$　$\overline{A}\cap\overline{B}$

サイコロの目のうち 2 の倍数でないものは、1、3、5

3 の倍数でないものは、1、2、4、5

2 の倍数でも 3 の倍数でもないものは、1、5　　なので、

$$P(A)=\left(\frac{3}{6}\right)^n \qquad P(B)=\left(\frac{4}{6}\right)^n \qquad P(A\cap B)=\left(\frac{2}{6}\right)^n$$

よって、求める確率は、

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n$$

ジャンプ

確認 ▶確率

(1)　サイコロを 5 回投げる。出た目の種類が 4 種類になる確率を求めよ。

(2)　サイコロを n 回投げるとき次の確率を求めよ。

（ア）　出た目の最大が 5 である確率

（イ）　出た目の最小が 2、最大が 5 である確率

(1)　全事象を U とすると、$n(U)=6^5$

出た目の 4 種類の選び方で ${}_6C_4$(通り)、4 種類のうち 2 回出る目の選び方で 4 通り、2 回出る目が 5 回のうち何回と何回で出るかで ${}_5C_2$(通り)、1 回出る目の並び方で 3!(通り)である。よって、出た目の種類が 4 種類となる事象を A とすると、

$$n(A)={}_6C_4\cdot 4\cdot {}_5C_2\cdot 3!=15\cdot 4\cdot 10\cdot 6$$

求める確率は、$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{15\cdot 4\cdot 10\cdot 6}{6^5}=\dfrac{25}{54}$

(2)　（ア）　出た目の最大を M、最小を m とする。出た目の最大が k 以下となる事象を $D_{M\leqq k}$ などと表す。$D_{M\leqq 4}\cup D_{M=5}=D_{M\leqq 5}$、$D_{M\leqq 4}\cap D_{M=5}=\phi$

これより、$P(D_{M\leqq 4})+P(D_{M=5})=P(D_{M\leqq 5})$であり、

「出た目の最大が 5 以下」は「出た目は 1〜5 のどれか」と言い換えられるので、

$$P(D_{M=5})=P(D_{M\leqq 5})-P(D_{M\leqq 4})=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

（イ）（ア）と同様に考えて、

$$P(D_{2\leqq m,\ M\leqq 4})+P(D_{2\leqq m,\ M=5})=P(D_{2\leqq m,\ M\leqq 5})$$

「出た目の最小が 2 以上、最大が 5 以下」は、「出た目は 2〜5 のどれか」と言い換えられるので、

$$P(D_{2\leqq m,\ M=5})=P(D_{2\leqq m,\ M\leqq 5})-P(D_{2\leqq m,\ M\leqq 4})=\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n$$

最小を 2 から 3 に変えると同様に、

$$P(D_{3\leqq m,\ M=5})=P(D_{3\leqq m,\ M\leqq 5})-P(D_{3\leqq m,\ M\leqq 4})=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n$$

最小の方も 2 に合わせると、

$$P(D_{2=m,\ M=5})=P(D_{2\leqq m,\ M=5})-P(D_{3\leqq m,\ M=5})$$

$$=\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n\right\}-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}=\left(\frac{4}{6}\right)^n-2\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n$$