力学

1 等加速度直線運動の公式

オリジナル問題

Step1 導出せよ

等加速度直線運動の公式

時刻 t の速度 $v = v_0 + at$　（v_0：初速度　　a：加速度）

時刻 0 から時刻 t の間の変位 $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

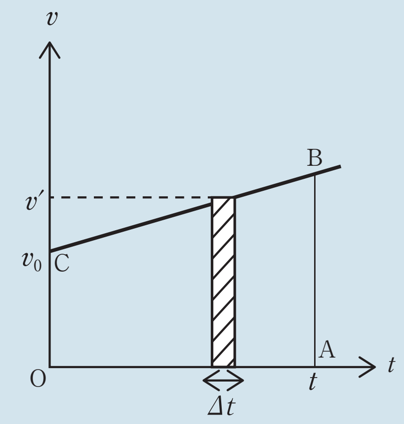
Step2 問　題

以下の文章の空欄に適する式をそれぞれ求めよ。

物体が一定の加速度で直線上を運動するとき，その運動を等加速度直線運動という。物体が等加速度直線運動する様子を考え，このときに成り立つ式を導出しよう。

まず，物体の速度変化について考える。加速度は，物体の速度の単位時間あたりの変化を表す。よって，一定の加速度 a で等加速度直線運動する物体の速度は，時間 t だけ経過する間に（　1　）だけ変化する。このとき，物体の初速度（時刻 0 での速度）を v_0 とすると，時刻 t の速度 $v =$（　2　）と表すことができる。加速度は，物体の運動を $v - t$ グラフ（時刻 t に対する速度 v の変化を表すグラフ）で表すときの（　3　）に相当する。

次に，物体の変位（位置の変化）を考える。これは，$v - t$ グラフによって求められる。いま，図に示した短い時間 Δt の間の物体の速度が v' で一定だとみなすと，この間の変位は（　4　）と近似できる。これは，図の中の斜線で塗りつぶした長方形の面積に等しい。時刻 0 から時刻 t までをこのような短い時間に区切られたものの足し合わせと考えると，その間の変位は各長方形の面積の和であり，Δt をきわめて短くしたときには台形 OABC の面積と等しくなる。このことから，時刻 0 から t の間の物体の変位は $x =$（　5　）と求められることがわかる。



[考え方]

高校物理では、等加速度直線運動する物体について考えることがよくあります。ここでは、等加速度直線運動する物体の速度と変位を表す公式を導出します。

速度は、「加速度」の意味を正しく理解することで求められます。また、変位は $v - t$ グラフを活用することで求められます。いずれも設問に従って進めることで、考え方を理解できます。

なお、導出される式はいずれも頻繁に利用するものなので、覚えて使えるようにしておきましょう。

解　説

(1)

等加速度直線運動する物体の速度は一定のペースで変化します。変化のペースを表すのが加速度であり、より正確には「単位時間あたりの速度変化」を意味します。

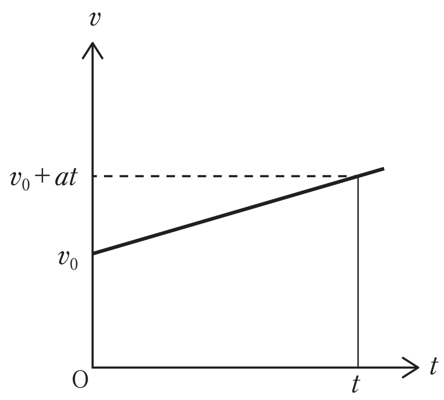
このことがわかれば、時間 t だけ経過する間に物体の速度は at だけ変化することがわかります。

(2)

物体の速度は、時刻 0 から時刻 t の間に at だけ変化します。よって、時刻 0 に速度 v_0 だった物体は、時刻 t には速度が $v = v_0 + at$ になることがわかります。

(3)

$v - t$ グラフは、物体の運動の様子を知ることができる重要なものです。時刻 t の速度が $v = v_0 + at$ と表される物体の運動を $v - t$ グラフで表すと、次のようになります。



これより、物体の加速度 a は $v - t$ グラフの傾きに相当することがわかります。

(4)

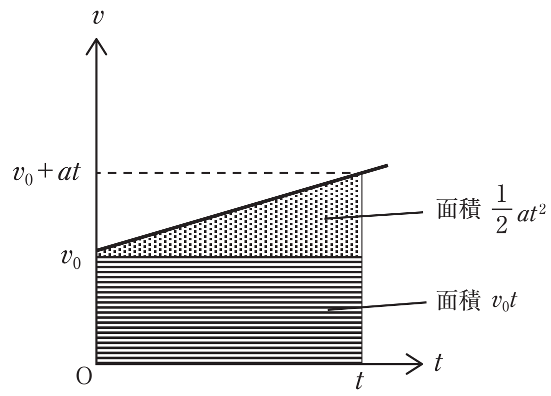
上のように求められる $v - t$ グラフからは、物体の変位が求められます。まずは、短い時間 Δt の間の変位を考えます。実際にはこの間も物体の速度は変化しますが、Δt が短ければ速さが v' で一定とみなすことができます。よって、この間の変位は $v'\Delta t$ と求まります。

(5)

(4)で求めた短い時間 Δt の間の変位は、図中の長方形の面積と考えることができます。よって、このような長方形の面積を時刻 0 から時刻 t まで足し合わせればその間の変位が求まります。このとき、Δt をきわめて短くすることで長方形の足し合わせは台形 OABC に等しいとみなせるため、長方形の面積の和は台形 OABC の面積として求められます。

以上のことから、時刻 0 から時刻 t の間の物体の変位は $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ と求められます。

※次のように、台形 OABC を長方形と直角三角形に分けて考えると面積を求めやすくなります。



等加速度直線運動の公式

時刻 t の速度 $v = v_0 + at$ （v_0：初速度　a：加速度）

時刻 0 から時刻 t の間の変位 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

力学

2 浮力の大きさ

オリジナル問題

Step1 導出せよ

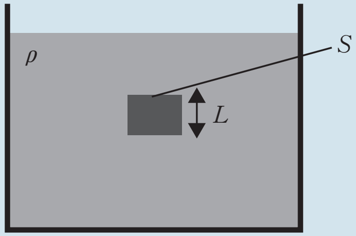
物体が流体から受ける浮力の大きさ $F = \rho V g$
（ρ：流体の密度　V：流体中の物体の体積　g：重力加速度の大きさ）

Step2 問 題

以下の文章の空欄に適する式をそれぞれ求めよ。

物体が水中に浮くことがある。これは，水から物体に浮力がはたらくためである。

図のように，底面積 S，高さ L の直方体が上面と下面が水平な状態を保って，密度 ρ の水中に完全に沈んだ場合を考える。この物体の上面が水から受ける力の大きさは，上面の位置での圧力を p とすると（　1　）と表せる。この力は鉛直下向きにはたらく。また，このとき下面の位置での圧力は，重力加速度の大きさを g とすると（　2　）で表せるので，下面は水から鉛直上向きに大きさ（　3　）の力を受ける。



直方体の側面が受ける力はつりあうため，直方体が水から受ける力の合力は鉛直（　4　）向きに大きさ（　5　）となる。これが，直方体が受ける浮力である。

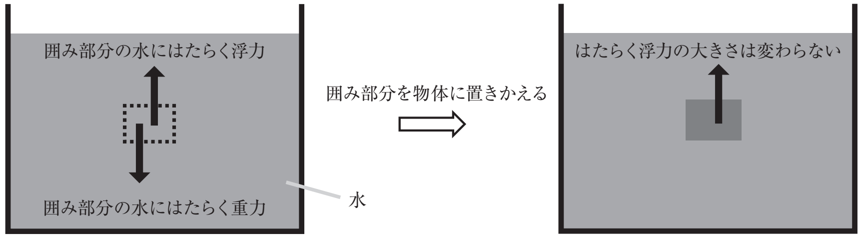
このように求められた浮力の大きさは，直方体の体積 V を用いると（　6　）と表すことができる。これは，直方体と同じ体積の水にはたらく重力の大きさと等しい。

[考え方]

流体（気体や液体）中にある物体には、鉛直上向きの浮力がはたらきます。これは、流体が物体を鉛直上向きに押す力が鉛直下向きに押す力より大きいために生まれる力です。つまり、流体が物体を鉛直上向きに押す力と鉛直下向きに押す力の大きさを求めれば、その差として浮力の大きさを求めることができます。

今回は、このような考え方に従って水からはたらく浮力の大きさを求めます。すると、その大きさが「物体が沈んでいる場所にもともとあった水にはたらく重力」の大きさと等しいことがわかります。

このことは「アルキメデスの原理」と呼ばれます。水中に物体が沈む前、そこにあった水は浮力によって支えられていました。水にはたらく重力と浮力がつりあっていたということです。その水を物体に置きかえても、周囲の水からはたらく浮力の大きさは等しいはずです。アルキメデスの原理はこのように理解することができます。



解　説

(1)

直方体の上面が水から受ける力の大きさは、上面の位置での圧力（単位面積あたりの、面を垂直に押す力の大きさ）p と上面の面積 S とをかけて、pS と求められます。
上面は、水から鉛直下向きに押されます。

(2)

下面は、上面より L だけ深い位置にあります。水の圧力は、深さが h 増すごとに ρgh だけ大きくなります。よって、下面の位置での圧力は上面の位置での圧力より ρgL だけ大きく、$p + \rho gL$ だとわかります。

(3)

直方体の下面が水から受ける力の大きさは、下面の位置での圧力 $p + \rho gL$ と下面の面積 S とをかけて、$(p + \rho gL)S$ と求められます。

下面は、水から鉛直上向きに押されます。

(4)

　直方体は側面においても水から力を受けますが、それらの合力は 0 となります。よって、直方体が水から受ける合力は上面が受ける力と下面が受ける力の和となります。

　直方体の下面が受ける力は上面が受ける力より大きいため、水から受ける力の合力は鉛直上向きとなります。

(5)

　直方体が水から鉛直上向きに受ける力の合力の大きさは

$$(p + \rho gL)S - pS = \rho SLg$$

となります。これが、直方体が水から受ける浮力の大きさを表します。

(6)

　水中に完全に沈んでいる直方体の体積 $V = SL$ です。よって、(5)で求めた浮力の大きさは ρVg と表すことができます。

　これは、体積 V の水にはたらく重力の大きさと等しい値です。すなわち、水中に完全に沈んでいる物体にはたらく浮力の大きさは、物体と同じ体積の水にはたらく重力の大きさに等しいことが示されました。

　物体が流体から受ける浮力の大きさ $F = \rho Vg$
（ρ ：流体の密度　V：流体中の物体の体積　g：重力加速度の大きさ）

力学

3 運動エネルギー

オリジナル問題

Step1 導出せよ

　動いている物体の運動エネルギー：$\frac{1}{2}mv^2$
（m：物体の質量　　v：物体の速さ）

　重力による位置エネルギー：mgh
（m：物体の質量　g：重力加速度の大きさ
h：物体の基準面からの高さ）

　弾性力による位置エネルギー：$\frac{1}{2}kx^2$
（k：ばね定数　　x：自然長からのばねの伸び or 縮みの長さ）

Step2 問　題

以下の文章の空欄に適する式をそれぞれ求めよ。

摩擦のない水平面上を，質量 m の物体Aが速さ v で等速度運動している。物体Aが別の物体Bにぶつかってから静止するまでの間にする仕事を考える。

物体AとBが接触している間, 互いに及ぼしあう力の大きさは F(一定）であるとする。このとき，物体Aの運動方程式を考えると，Aの加速度はAの運動の向きを正として（　1　）と表せる。また，AがBと接触してから静止するまでの時間は（　2　）となり，その間のAの移動距離は（　3　）となる。

以上のことから，AがBに対してした仕事は（　4　）であり，Aははじめにこれだけのエネルギーを持っていたことがわかる。はじめに，Aが運動していたときに持っていたエネルギーは「運動エネルギー」と呼ばれる。

[考え方]

物体が他のものに対して仕事をする能力を持っているとき、物体はエネルギーを持っていると言います。エネルギーにはいろいろな種類がありますが、ここでは動いている物体が持つ「運動エネルギー」を考えます。

動いている物体が静止するとき、運動エネルギーを失います。これは、物体が静止するまでの間に他のものに対して仕事をするからです。このことから、物体が静止するまでの間にどれだけの仕事をするかを考えれば、動いているときに物体が持っている運動エネルギーが求められるとわかります。

解　説

(1)

まずは、Bと接触して力を及ぼしあっているときのAの運動方程式を考えます。Aが運動する向きを正としてAの加速度を a とします。また、AはBから運動の向きと逆向きに力を受けるので、運動の向きを正とすると、Aが受ける力は $-F$ と表せます。

よって、Aの運動方程式は

$$ma = -F$$

と書けます。

これを解くと、Aの加速度は $-\dfrac{F}{m}$ （一定）と求まります。

(2)

Aの運動は等加速度直線運動となるので、10ページで求めた等加速度直線運動の公式を使うことができます。

運動の向きを正として、Aの速度は v から0へ変化します。この変化にかかる時間を t とすると、速度を表す等加速度直線運動の公式から

$$0 = v - \frac{F}{m}t$$

の関係がわかり、ここから $t = \dfrac{mv}{F}$ とわかります。

(3)

Aは初速度 v、加速度 $a = -\dfrac{F}{m}$ で時間 $t = \dfrac{mv}{F}$ の間だけ等加速度直線運動します。この間の変位 x は11ページで求めた公式を用いて、

$$x = v\frac{mv}{F} + \frac{1}{2}\left(-\frac{F}{m}\right)\left(\frac{mv}{F}\right)^2 = \frac{mv^2}{2F}$$

だとわかります。これが、Bと接触している間のAの移動距離です。

(4)

(3)から、A から大きさ F の力を受けている間に B が動く距離は $\frac{mv^2}{2F}$ だとわかります。よって、A が B に対してした仕事は

$$F \times \frac{mv^2}{2F} = \frac{1}{2}mv^2$$

と求められます。これは、動いているときに、A が持っていた運動エネルギーを表しています。

> 動いている物体の運動エネルギー：$\frac{1}{2}mv^2$
> （m：物体の質量　　v：物体の速さ）

※ 今回は、物体 A と B が及ぼしあう力の大きさが一定だと単純化して考えました。及ぼしあう力の大きさが変化する場合には、次のように考察できます。

物体が他のものに大きさ f の力を及ぼすとき、物体も同じ大きさの力を受けます。このとき、物体の加速度を $\frac{dv}{dt}$（速度 v の時間微分）と表すと、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -f$$

と書けます。よって、物体が静止するまでに行う仕事は

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}\,dx$$

（x_1：物体の初めの位置　　x_2：仕事を終えたときの位置）

ですが、$dx = \frac{dx}{dt}dt = v\,dt$ より

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}v\,dt = -\int_{v}^{0} mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2$$

と表せます。このようにして、動いている物体の運動エネルギーを求められます。

※ 運動エネルギーと位置エネルギーの和を「力学的エネルギー」と言い、物体の運動を考えるのに役立ちます。

力学分野で登場する位置エネルギーには、重力による位置エネルギーとばねの弾性力による位置エネルギーがあります。

重力による位置エネルギーは、次のように導出できます。

質量 m の物体が基準面（重力による位置エネルギーを 0 とする高さ）から高さ h の位置にあるとし、その位置から基準面まで物体が鉛直に落下する運動を考えます。この間、物体には大きさ mg（g：重力加速度の大きさ）の重力がはたらきます。また、物体の移動距離は h なので、重力が物体にする仕事は

$$mg \times h = mgh$$

となります。これが、質量 m の物体が基準面から高さ h の位置にあるときの重力による位置エネルギーです。

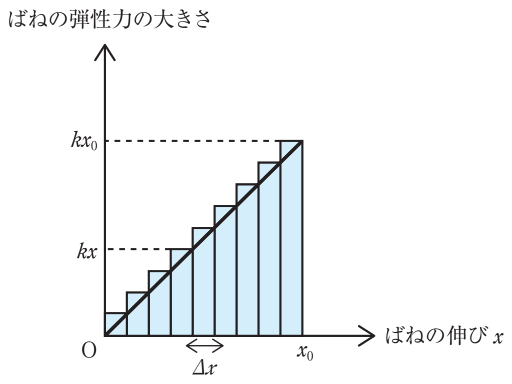
> 重力による位置エネルギー：mgh
> （m：物体の質量　g：重力加速度の大きさ
> h：物体の基準面からの高さ）

ばねの弾性力による位置エネルギーは、次のように導出できます。

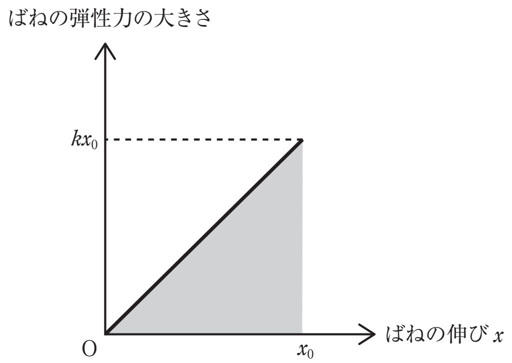
ばねを自然長の状態から、自然長から長さ x_0 だけ伸びた状態にするのに必要な仕事を考えます。

ばねの伸びが x のとき（$0 < x < x_0$）、ばねの弾性力の大きさは kx となります。この状態からばねを微小な長さ Δx だけ伸ばすのには（Δx が微小であれば、この間の弾性力の大きさは kx で一定とみなせる）、$kx\Delta x$ の仕事が必要です。

ばねの伸びが 0 から x_0 になるまでの間のこの値を足し合わせれば、ばねの長さを x_0 だけ伸ばすのに必要な仕事が求められます。これは、次のグラフを用いて求めることができます。



各長方形の面積は、ばねの伸びを x から Δx だけ増加させるのに必要な仕事 $kx\Delta x$ を表します。Δx が微小であれば、長方形の面積の合計は次の三角形の面積と等しくなります。



この面積は $\dfrac{1}{2}kx_0{}^2$ であり、これがばねを自然長から長さ x_0 だけ伸びた状態にするのに必要な仕事を表します。

この仕事は、ばねの弾性力による位置エネルギーとして蓄えられます。以上のことから、自然長から長さ x_0 だけ伸びているばね定数 k のばねに蓄えられている弾性力による位置エネルギーは $\dfrac{1}{2}kx_0{}^2$ だとわかります。

なお、ばねを自然長から縮めていく場合も同様に考察でき、自然長から長さ x_0 だけ縮んでいるばね定数 k のばねに蓄えられている弾性力による位置エネルギーも $\dfrac{1}{2}kx_0{}^2$ となります。

※ばねを自然長から x_0 だけ伸びた状態にするための仕事（＝ばねの弾性力による位置エネルギー）は、

$$\int_0^{x_0} kxdx = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{1}{2}kx_0{}^2$$

のように求められます。グラフを用いることで、積分計算を回避できます。

> 弾性力による位置エネルギー：$\dfrac{1}{2}kx^2$
> （k：ばね定数　　x：自然長からのばねの伸び or 縮みの長さ）

力学

4 運動量保存則

2010 年 山口大学（改）

Step1 導出せよ

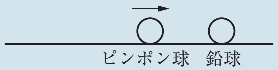
運動量の変化と力積の関係：物体の運動量は受ける力積の分だけ変化する

$$mv' - mv = F\Delta t$$

（ m：物体の質量　v：変化前の速度　v'：変化後の速度
F：受ける力（一定）　Δt：力を受ける時間）

Step2　問　題

問２　右図のように，速度 v_0 でなめらかな水平面上を動いていた質量 m のピンポン球が静止していた質量 M（$M > m$）の鉛球に衝突し，鉛球は動き出した。ピンポン球と鉛球の衝突前後における運動はいずれも一直線上の運動であり，回転はしていなかった。以下ではそれぞれの重心の運動に注目して議論する。また，ピンポン球がはじめ動いていた方向を正の向きとする。



　衝突中にピンポン球と鉛球が力を及ぼしあう時間を Δt とする。この間に鉛球はピンポン球から一定の力 F を受けるとしよう。ピンポン球と鉛球の衝突中の加速度をそれぞれ a，A とおくと，衝突中の各球の運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} ma = \boxed{\text{①}} \\ MA = \boxed{\text{②}} \end{cases} \tag{3}$$

式(3)から衝突中の加速度は時間によらない一定値であることがわかる。衝突後のピンポン球と鉛球の速度をそれぞれ v, V とおき，これらと $v_0, \Delta t$ を用いて衝突中の各球の加速度を表すと次式になる。

$$\begin{cases} a = \boxed{\text{③}} \\ A = \boxed{\text{④}} \end{cases} \tag{4}$$

式(3)，(4)より，この衝突においては次式が成り立つことがわかる。

$$mv + MV \boxed{\text{⑤}} mv_0$$

[考え方]

　複数の物体が互いに力を及ぼしあうのみで、他からの力（外力）を受けない（受けてもつりあっている）ときには、運動量の和が一定に保たれます。これを運動量保存則と言います。

　運動量保存則が成り立つ典型的なパターンは、２球の衝突や分裂です。互いに力を及ぼしあうのみで外力を受けない衝突や分裂において、運動量の和は保存されます。

　今回は、２球が衝突する運動を通して運動量保存則が成り立つ理由を考えます。

解　説

①、②

　作用反作用の法則から、鉛球がピンポン球から力 F を受けるとき、ピンポン球は鉛球から力 $-F$ を受けることがわかります。

　このことから、運動方程式はそれぞれ

　　ピンポン球：$ma = -F$

　　鉛球　　　：$MA = F$

と表すことができます。

③、④

　上記の運動方程式から、

$$\text{ピンポン球の加速度 } a = -\frac{F}{m} \qquad \cdots\text{①}$$

$$\text{鉛球の加速度 } A = \frac{F}{M} \qquad \cdots\text{②}$$

のようにそれぞれ一定値になることがわかります。

　さて、ピンポン球の速度は時間 Δt の間に v_0 から v に、鉛球の速度は時間 Δt の間に 0 から V に変わります。よって、それぞれの加速度は

$$\text{ピンポン球の加速度 } a = \frac{v - v_0}{\Delta t} \qquad \cdots\text{③}$$

$$\text{鉛球の加速度 } A = \frac{V - 0}{\Delta t} = \frac{V}{\Delta t} \qquad \cdots\text{④}$$

と求めることができます。

⑤

求めた①と③は同じものを表すことから、

$$-\frac{F}{m}=\frac{v-v_0}{\Delta t}$$

すなわち

$$-F\Delta t=mv-mv_0 \quad \cdots ⑤$$

の関係がわかります。

同様に、②と④は同じものを表すことから、

$$\frac{F}{M}=\frac{V-0}{\Delta t}$$

すなわち

$$F\Delta t=MV-0 \quad \cdots ⑥$$

の関係が分かります。

式⑤と⑥を足し合わせて整理すると、

$$mv+MV=mv_0+0$$

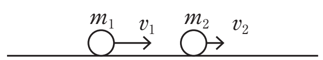
と求められます。

この式の右辺は衝突前の 2 球の運動量の和を、左辺は衝突後の 2 球の運動量の和を表します。つまり、衝突前後で 2 球の運動量の和が保存されることが示されました。

運動量保存則：外力を受けない物体系の運動量の和は保存される

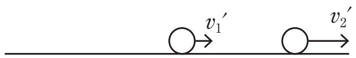
$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

衝突前



$\Downarrow$

衝突後



※求めた式⑤の左辺はピンポン球が受けた力積を、右辺はピンポン球の運動量の変化を表します。同様に、式⑥の左辺は鉛球の受けた力積を、右辺は鉛球の運動量の変化を表します。

これらは、物体の運動量の変化が物体が受ける力積に等しいことを示しています。

運動量の変化と力積の関係：物体の運動量は受ける力積の分だけ変化する

$$mv'-mv=F\Delta t$$

（m：物体の質量　v：変化前の速度　v'：変化後の速度
F：受ける力（一定）　Δt：力を受ける時間）

※この問題では 2 球が及ぼしあう力の大きさが一定だと単純化して考えています。及ぼしあう力の大きさが変化する場合には、次のように考察できます。

力 f を受ける物体の運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt}=f$$

と書けます（20 ページ参照）。これを時間で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}\,dt=\int_{t_1}^{t_2} f\,dt$$

（t_1：力を受け始めた時刻　t_2：力を受け終わった時刻）

$$\int_{t_1}^{t_2} m\,dv=\int_{t_1}^{t_2} f\,dt$$

$$mv(t_2)-mv(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} f\,dt$$

となります。右辺は物体が受ける力積を、左辺は物体の運動量の変化を表します。

力学

5 重心速度一定

2017年 大阪工業大学（改）

Step1 導出せよ

複数物体が外力を受けないとき、その重心は等速度運動する

Step2 問 題

2015年9月14日，重力波が観測された。この重力波は，13億光年のかなたで2つのブラックホールが互いの周りを回転しながら衝突・合体したときに，放出されたものだという。以下では2つのブラックホールを，質量 m_1，m_2 の2つの質点（以下，星1，星2と呼ぶ）とみなし，万有引力の下でどのような運動をするかを力学的観点から調べてみよう。

(1) 星1，星2の位置ベクトルを $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，速度を $\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ とする。以下で，物理量 X の微小な時間 Δt の間の変化を ΔX と書き表すことにする。この書き方では，位置ベクトルの変化 $\vec{r_1}$ は，速度ベクトル $\vec{v_1}$ を用いて，$\Delta\vec{r_1} = \vec{v_1}\Delta t$ となる。この式は，以下のように書いてもよい。

$$\vec{v_1} = \frac{\Delta\vec{r_1}}{\Delta t}$$

星1の速度の変化 $\Delta\vec{v_1}$ と，星2から星1にはたらく万有引力 $\vec{F}$ の間には，

$$m_1\Delta\vec{v_1} = \vec{F}\Delta t \quad ①$$

という関係がある。式①は $\boxed{\text{ア}}$ の変化が $\boxed{\text{イ}}$ に等しいことを表している。一方，星1から星2にはたらく力は，$\boxed{\text{ウ}}$ の法則により $-\vec{F}$ となるので，次の関係式が成り立つ。

$$m_2\Delta\vec{v_2} = -\vec{F}\Delta t \quad ②$$

式①，②より，

$$m_1\Delta\vec{v_1} + m_2\Delta\vec{v_2} = \Delta(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}) = 0 \quad ③$$

1）式③の表す物理的内容を簡潔に述べよ。

星1，星2の重心の位置ベクトル $\vec{R}$，速度 $\vec{V}$，加速度 $\vec{A}$ は，次のように表される。

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2},\quad \vec{V} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2},\quad \vec{A} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

2）問1)の結果を踏まえ，重心がどのような運動をするか簡潔に述べよ。

[考え方]

外力を受けない複数物体の運動量の和は一定に保たれる（運動量保存則）ことを学びました。今回は、このときの複数物体の重心速度について考えます。

問題文にある通り、ある物体の速度 $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$（位置 $\vec{r}$ を時刻 t で微分したもの*）と表せます。また、2物体（質量 m_1 で位置に $\vec{r_1}$ の物体と質量 m_2 で位置 $\vec{r_2}$ の物体）の重心の位置 $\vec{R}$ は

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

と表せます。これを時刻 t で微分すれば重心の速度 $\vec{V}$ となるので、

$$\vec{V} = \frac{m_1\dfrac{\Delta\vec{r_1}}{\Delta t} + m_2\dfrac{\Delta\vec{r_1}}{\Delta t}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

とわかります。

運動量保存則が成り立つときには、このように表される重心速度についてどのようなことが言えるか考えます。

*便宜上、このように表記していますが、厳密にはこれは時刻 Δt の間に $\Delta\vec{r}$ だけ動いたときの平均の速度を表しています。『位置 $\vec{r}$ を時刻 t で微分したもの』とは瞬間の速度のことを指し、$\Delta t \to 0$ の極限を取ることで、ある瞬間の速度 v を求めることができます。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ （位置\ \vec{r}\ を時刻\ t\ で微分したもの）$$

解 説

ア、イ

まずは、星2から万有引力を受けて運動する星1について考えます。微小時間 Δt の間の星1の速度変化が $\Delta\vec{v_1}$ のとき、運動量の変化は $m_1\Delta\vec{v_1}$ と表せます。また、この間に力 $\vec{F}$ を受ける星1は、力積 $\vec{F}\Delta t$ を受けます。

物体の運動量は受けた力積の分だけ変化することから、

$$m_1 \Delta\vec{v_1} = \vec{F}\Delta t$$

の関係が成り立つことがわかります。

ウ

作用反作用の法則から、星 1 が星 2 から力 $\vec{F}$ を受けるとき、星 2 は星から力 $-\vec{F}$ を受けることがわかります。

よって、微小時間 Δt の間に星 2 が受ける力積は $-\vec{F}\Delta t$ と表せます。また、この間の速度変化 $\Delta\vec{v_2}$ を用いて運動量の変化は $m_2\Delta\vec{v_2}$ と表せます。
両者が等しいことから

$$m_2\Delta\vec{v_2} = -\vec{F}\Delta t$$

の関係が成り立つとわかります。

1

式①、②を足し合わせると

$$m_1\Delta\vec{v_1} + m_2\Delta\vec{v_2} = 0$$

となります。ここで、$m_1\Delta\vec{v_1} = \Delta(m_1v_1)$、$m_2\Delta\vec{v_2} = \Delta(m_2v_2)$ であることから

$$m_1\Delta\vec{v_1} + m_2\Delta\vec{v_2} = \Delta(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}) = 0$$

の関係がわかります。
$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$ は、星 1 と星 2 の運動量の和を表します。式③はこれの変化が 0 であること、すなわち星 1 と星 2 の運動量の和が一定に保たれることを意味しています。

これは、運動量保存則を表しています。星 1 と星 2 は互いに万有引力を及ぼしあうのみで外力を受けないため、運動量保存則が成り立ちます。

2

問題文に示されている通り、星 1、星 2 の重心の速度は $\vec{V} = \dfrac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$

と表されます。この式の分子は、星 1 と星 2 の運動量の和 $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$ を表します。今回はこれが一定に保たれることから、重心の速度 $\vec{V}$ が一定であることがわかります。すなわち、星 1、星 2 の重心は等速度運動（等速直線運動）することがわかります。

複数物体が外力を受けないとき、その重心は等速度運動する

力学

6 等速円運動の速度、加速度

2014年 南山大学（改）

Step1 導出せよ

等速円運動する物体の速度

大きさ：$r\omega$ （r：円の半径　　ω：角速度）

向き　：円の接線方向

等速円運動する物体の加速度

大きさ：$r\omega^2$（r：円の半径　　ω：角速度）

向き　：円の中心方向